Gráficas lineales: un proceso de significación a partir de su uso en ingeniería

Linear graphics: A process of meaning from it use in an engineering

TUYUB SÁNCHEZ Isabel
BUENDÍA ÁBALOS Gabriela

Recepción: agosto 9 de 2017 | Aprobado para publicación: septiembre 11 de 2017.

Resumen

En este escrito se analiza el uso de gráficas lineales en una maestría en ingeniería con la intención de generar una base de significación para el desarrollo de pensamiento matemático funcional. Esta investigación de corte socioepistemológico muestra tres casos ilustrativos sobre cómo esta comunidad académico-científica usa gráficas cartesianas. Se evidencian significados propios que provienen del uso de conocimiento matemático y que se integran en una significación mayor con una riqueza en la articulación de nociones como pendiente de rectas y puntos de intersección. El objetivo es mostrar la factibilidad de un cambio didáctico de los objetos hacia las prácticas, ya que estas favorecen un desarrollo intencional de usos del conocimiento matemático, propuesta que puede permear a lo largo del contexto escolar como una herramienta para el desarrollo de pensamiento matemático.

Isabel Tuyub Sánchez. Docente de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Yucatán. Es maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Su línea de investigación se refiere a la construcción social del conocimiento matemático. Ha publicado en revistas especializadas internacionales producto de investigaciones y trabajo colegiado con cuerpos académicos universitarios. Correo electrónico: isabel.tuyub@correo.uady.mx.

Gabriela Buendía Ábalos. Afiliada a la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC. Es doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) y miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel 1. Su línea de investigación se refiere a la construcción social del conocimiento matemático escolar. Ha publicado en revistas especializadas nacionales e internacionales los resultados de proyectos y el trabajo continuo de profesores y alumnos de posgrado. Correo electrónico: buendiag@hotmail.com

Palabras clave: GRÁFICAS LINEALES, INGENIERÍA, MATEMÁTICA EDUCATIVA.

Abstract
In this paper we analyzed the use of linear graphs in an engineering community in order to generate a significance base for the development of a functional mathematical reasoning. This research is based on the socioepistemological framework. We present three illustrative cases on how the scientific-academic community uses cartesians graphics. From these uses, meanings for mathematical knowledge are integrated into a richer and articulated greater significance on the notion of lineal slope and points of intersection. The objective is to show the possibility of a didactical change from objects to practices, proposal that can permeate along the school context as an educational tool for the development of mathematical reasoning.

Key words: LINEAR GRAPHS, ENGINEERING, EDUCATIONAL MATHEMATICS.

1. Introducción

Partimos de reconocer que existen al menos dos escenarios para la matemática: uno estructurado, sobre el que se diseña la matemática que se enseña en la escuela, y otro en el que se reconoce su importancia en lo cotidiano o en el ámbito profesional. El primero debería impactar en el segundo, pues uno de los fines de la educación es formar profesionales capacitados para resolver problemas de la sociedad actual. Pero para que ello suceda, la segunda debería poder dar indicios de elementos de significación que favorecieran el objetivo de la matemática escolar.

El interés de este escrito radica en cómo generar un puente entre estos dos escenarios; no se está pensando en recrear situaciones problema que se presentan en la vida real o profesional y llevarlo a contextos escolares con tiempos didácticos controlados y objetivos diferentes que ocasionan didácticas artificiales. La estrategia tampoco busca explicitar los conocimientos matemáticos inmersos en lo profesional, convertirlos en los contenidos iniciales del currículo como técnicas que sirvan al futuro profesionista en cualquier área que desee desempeñarse.

La propuesta presente en este escrito se enfoca en identificar qué matemática es funcional en escenarios profesionales específicos, así como cuál matemática permite un desarrollo de pensamiento matemático y cómo está presente en esos contextos. Importa reconocer el quehacer de una cierta comunidad y de sus miembros y en ello, cómo usa la matemática, en qué momento se emplea, por qué y para qué. Estos cuestionamientos generales nos permitirían proponer un eje para el aprendizaje de las matemáticas. Coherentemente, este eje no pudiera estar enfocado en un cúmulo de objetos matemáticos aislados entre sí; más bien es un eje en el que incluso puedan converger varias nociones.

Así, en contraste con la pregunta de cuánto debe saber de matemáticas un alumno, nos cuestionamos sobre el uso de la matemática en diferentes contextos. Ello le provee a la matemática escolar una base de significación diferente (Cordero *et al.*, 2016), pues se genera no solo a partir de la matemática misma y su estructuración lógica, sino analizando su uso en un contexto de interés. En particular analizaremos el uso de las gráficas cartesianas en una comunidad científica de ingeniería, para con ello proponer una base de significación para el conocimiento matemático referido a ese tópico y que signifique a la matemática de dicha comunidad y al sistema educativo en general.

Cordero *et al.* (2016) proporcionan evidencia de cómo las gráficas son herramientas que sostienen y desarrollan argumentos cualitativos para construir conocimiento relativo a temas matemáticos, como las ecuaciones diferenciales. Al ser estas herramientas imprescindibles para los ingenieros, el uso significativo de las gráficas cartesianas proporciona una base de significación que enriquecen considerablemente los aspectos analíticos de la misma. Las gráficas se muestran no solo como mera ilustración, sino como parte de un conocimiento funcional y articulado vigente en una comunidad de ingeniería.

Estos significados de las gráficas, nuevos o diferentes a los que se suelen presentar en el discurso matemático escolar tradicional, se evocan intencionalmente por el uso que de ellas se hace en la comunidad de estudio. Dichos significados los entenderemos como una *resignificación de gráficas y sus elementos* en un contexto situado a partir de su uso.

Esta resignificación de gráficas es nuestro objeto de estudio. En este escrito presentamos evidencia a partir del uso de gráficas cartesianas lineales en una comunidad de Maestría en Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán. A partir del análisis de las gráficas en problemas asociados a las ramas de la Ingeniería en Construcción y la Ingeniería Ambiental, evidenciamos dos usos generales de las gráficas cartesianas lineales de variación y cambio: organización de la información y el mostrar procedimientos y técnicas. Ello conformará una base de significación para una matemática que pudiera ser más funcional tanto en el contexto profesional particular, como a lo largo del currículo escolar.

2. El uso del conocimiento: aspectos teóricos

El objetivo del escrito es analizar cómo se usa el conocimiento matemático en un ambiente de corte profesional y académico del área de ingeniería con perfil investigativo y cómo se genera un saber funcional; ello permitirá indagar elementos de resignificación asociados a las gráficas cartesianas lineales de variación y cambio que son propias de la comunidad.

La estrategia usual de los sistemas educativos gira alrededor de la aplicación de los conceptos matemáticos; en consecuencia, el interés está en lograr acumular definiciones, algoritmos: primero se enseña y luego se aplica. En otro sentido, nuestra propuesta es generar aprendizajes basado en prácticas; la idea de aprendizaje como adquisición cambia para reconocer que el saber que nos importa desarrollar es el conocimiento en uso: de alguna manera se aplica aquello que te resulta significativo porque lo usas. Existe entonces un proceso continuo de resignificación a través del uso del conocimiento matemático y normado por el ejercicio intencional de prácticas que le son propias (Cantoral, 2013). Hablar de resignificación del conocimiento matemático busca entonces generar un cambio en las explicaciones de la problemática educativa relativa a las matemáticas que cambia desde centrar el objeto matemático hacia las prácticas y usos relacionadas epistemológicamente con él.

Bajo esa perspectiva, la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) como sistema teórico sostiene este estudio, ya que se ocupa del problema que plantea el cómo está constituido el saber matemático entre grupos humanos y la sociedad. Asume la legitimidad de toda forma de saber, sea popular, técnico o especializado, pues reconoce que en su conjunto constituyen gran parte de la sabiduría humana. Este marco modela la construcción social del conocimiento matemático; es decir, considera la construcción del conocimiento matemático desde un punto de vista situacional, tomando elementos como el contexto, la individualidad de los estudiantes, su entorno sociocultural y las relaciones que se presentan dentro de su comunidad, las afecciones y concepciones hacia la matemática, entre otros elementos de corte sociocultural; todo ello para entender cómo se construye cierto conocimiento matemático y por qué es de esa manera (Cantoral, 2013; Cordero, 2011).

Dentro de este marco se han identificado diferentes fuentes de resignificación y, por lo tanto, de formas de construcción de conocimiento matemático. Ha habido investigaciones de corte histórico –véase por ejemplo Buendía y Montiel (2011)– para determinar, desde una epistemología de prácticas, elementos para significar lo trigonométrico a partir de sus contextos de uso; otras que indagan escenarios de carácter profesional –por ejemplo Tuyub y Cantoral (2012)– con intención de inferir nociones que son implementadas de forma incluso inconsciente y que se hacen presentes en el diario quehacer de ese profesional. Existen también investigaciones que toman como fuente de resignificación el contexto cultural o cotidiano –por ejemplo, la investigación de Zaldívar y Cordero (2012)– con el propósito de mostrar que no es el escenario escolar el único que marca el aprendizaje con significado, sino que lo cotidiano proporciona elementos que significan el conocimiento matemático.

Esta tendencia busca cuestionar el conocimiento matemático que hoy vive en el aula: ver qué propiedades y elementos están detrás del concepto a partir del uso de este, cuál es el papel de diferentes contextos en los significados que se muestran en el aula que no son necesariamente bajo los cuales se originó un concepto. A esto nos referimos cuando afirmamos cuestionar la matemática de la escuela a partir, en primera instancia, de una descentración en el objeto matemático. Consideramos entonces una fuente social de reconstrucción de significados asociados a un conocimiento matemático (la *resignificación* continua de un objeto matemático) y ello se hace a través de analizar el uso de dicho conocimiento en un contexto específico; en su conjunto resultan una herramienta que permite la reconceptualización de saberes matemáticos (Biehler, 2005).

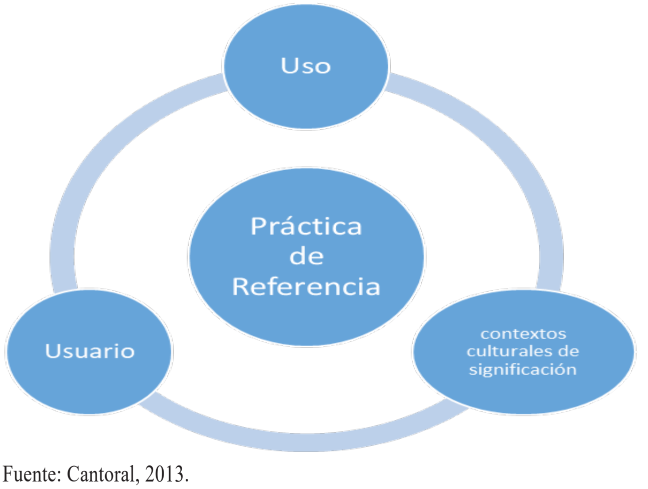
Bajo esta visión, entenderemos por *uso del conocimiento* aquel que se utiliza con cierto significado (no necesariamente el otorgado por el discurso matemático escolar) y con ello dar paso a reflexionar sobre la matemática funcional que permea en la comunidad de estudio, como aquella *matemática con sentido* para quien la usa (Cantoral, 2013; Cordero, 2011).

La TSME le apuesta entonces al *saber matemático* como un conocimiento en uso y considera clave problematizar dicho conocimiento. Esta problematización se logra al considerar cuatro elementos principales: una práctica de referencia como elemento central alrededor de la cual se interrelacionan tres elementos esenciales: el uso, el usuario y los contextos socioculturales de significación. En la figura 1 se aprecia un esquema sobre estos cuatro elementos para la problematización del saber.

Para nuestra investigación, dicho esquema se percibe de la siguiente manera:

- La *práctica de referencia* se refiere al quehacer de la comunidad de la Maestría en Ingeniería, cuyo objetivo es producir conocimiento que posea un impacto social para la región.
- Un *uso* que se fomenta en la práctica de referencia abordada con base en el concepto matemático asociado (gráficas lineales) a través de tareas específicas identificadas en el quehacer.
- Un *usuario* reflejado en la comunidad como dos grupos esenciales: uno de expertos (profesores-investigadores) y otro de aprendices (estudiantes), compuesta por ingenieros, arquitectos y biólogos que participan en un sistema de aprendizaje

Fig. 1. Problematización del saber.



Fuente: Cantoral, 2013.

social para el estudio de la ingeniería en construcción y ambiental. La noción de expertos y aprendices la retomamos del trabajo realizado por Lave y Wenger (1991).
- Los *contextos socioculturales de significación* son dibujados por los usos del conocimiento matemático es donde la comunidad significa su práctica a través de tareas clave que realiza para fomentar sus productos de investigación; dichas tareas se explicitarán en cada uno de los casos ilustrativos.

Al tomar esta perspectiva socioepistemológica, las gráficas pueden ser consideradas como un producto material continuo, porque son resultado de la experiencia histórica de comunidades, grupos sociales y científicos que, dependiendo de la institución a la que pertenecen, las norman y las requieren para ciertos fines, por ejemplo cuando se introducen y permanecen en el sistema educativo, transformándose y transformándolo a su vez (Wenger, 2001; Buendía, 2010; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Suárez, 2014).

En particular, el *uso de gráficas* en la TSME ha sido estudiado a través de los análisis de los funcionamientos y formas de las mismas (Cordero, 2008; Suárez y Cordero, 2010; Buendía, 2012). Estos funcionamientos y formas son situacionales y se dan a la luz de tareas concretas a realizar de manera dialéctica y continua. En particular entenderemos el *funcionamiento* relativo cómo y para qué le sirve la gráfica a la comunidad; la *forma* de la gráfica se refiere a la apariencia perceptible del objeto gráfica, así como cuáles son las maneras en la que determinada comunidad actúa sobre este: en qué se fijan para analizar, argumentar y cómo lo hacen en determinada tarea; es decir, qué de lo que veo de la gráfica se utiliza y por qué.

Por tanto, el análisis de los usos de las gráficas lineales se realizará por medio de la identificación de las interrelaciones entre los *funcionamientos* y las *formas* de las gráficas que se presentarán en los tres casos ilustrativos incluidos en este escrito.

3. Aspectos metodológicos

Se utilizó una metodología cualitativa como investigación no participante, en la que se grabaron clases, seminarios y se analizaron textos como artículos de investigación y tesis en diferentes ambientes propios de la comunidad.

Nuestro sujeto de estudio fue la comunidad de la Maestría en Ingeniería. Para poder estudiarla, la entendimos como una comunidad de práctica (CoP) en el sentido de Wenger (2001), cuyo objetivo es construir conocimiento científico de corte ingenieril; entre aprendices y expertos se fomenta una negociación de significados para generar *cosificaciones* (Tuyub, Martínez y Buendía, 2011) –productos finales propios– las cuales fueron analizadas para la inferencia de usos de gráficas cartesianas lineales.

Los llamados expertos en la CoP son los doctores investigadores, y los principiantes o aprendices son los estudiantes de la maestría. Estos estudiantes son egresados de licenciatura con o sin experiencia laboral que desean convertirse en expertos de alguna área específica de la maestría, e incluso realizar labores de investigación. Los miembros tienen un tiempo y un espacio propio para interaccionar entre ellos, por lo que hay oportunidad de que los aprendices conozcan a varios expertos y estén inmersos en las problemáticas de la comunidad. Hay un interés explícito por parte del programa institucional en la trasmisión de conocimientos para enriquecimiento de la comunidad. Las formas en que los integrantes se relacionan en un principio es jerárquico con respecto a los expertos, y de iguales entre los principiantes; también hay cierto respeto de estos últimos con los estudiantes avanzados. Luego, de acuerdo con sus intereses, se incorporan en grupos de trabajo más pequeños, ya sea un estudiante con un doctor investigador responsable o formando un grupo pequeño con otros estudiantes a cargo de uno o varios doctores; el rol jerárquico evoluciona a un rol de iguales, regido por los intereses compartidos, en el que el aprendizaje se produce en la práctica compartida.

Se denominan *cosificaciones* a los productos generados por la comunidad y son la explicitación de los procesos de esta comunidad manifestados en algo físico que permite el continuo de su conocimiento (Lave y Wenger, 1991). Las cosificaciones analizadas fueron proyectos finales, tesis de maestría y artículos de investigación publicados por los aprendices y expertos; de ahí que fueron pieza clave para analizar su quehacer.

Se eligieron gráficas cartesianas lineales de variación y cambio, porque son las que se presentan en la mayoría de los quehaceres de la CoP. De esta manera permitieron ser un medio transversal de análisis, porque sin importar qué especialidad ingenieril se está abordando, aparecen para resolver problemáticas de interés de la comunidad.

Por medio de los constructos teóricos socioepistemológicos del *funcionamiento* y la *forma* se pudieron categorizar dos tipos generales de usos:

- *La organización de la información*, cuyo objetivo es la comprobación de hipótesis comparando, por ejemplo, normas con propuestas alternativas producto de la investigación.
- *El uso de procedimientos y técnicas* que se manifiesta cuando la lectura de la gráfica permite predecir y tomar decisiones mediante la manipulación de ciertos elementos de la gráfica.

Las gráficas cartesianas se emplean en la mayoría de los casos para comprobar resultados y propuestas provenientes de la investigación en el área. Dado el carácter situacional de los usos de las gráficas para analizar su relación con la construcción de conocimiento científico, las *tareas* que emanan del quehacer de la misma comunidad de estudio enmarcan dicho y se pueden organizar por el cómo implementan los usos descritos.

La unidad mínima de análisis para poder estudiar los usos de las gráficas lineales en esta CoP fue tomada de los trabajos realizados por Montiel y Buendía (2012); se basa en la interrelación entre tres componentes: el *saber matemático*, que recae en las gráficas de variación y cambio; la *actividad humana*, referida el quehacer propio de la CoP y que se refleja en las tareas específicas; y la *transmisión del saber*, presente en las cosificaciones. Esta unidad de análisis (figura 2) considera las cuatro dimensiones (lo cognitivo, lo epistemológico, lo didáctico y lo social), que de manera sistémica propone la TSME para sus estudios.

4. Análisis de usos de las gráficas

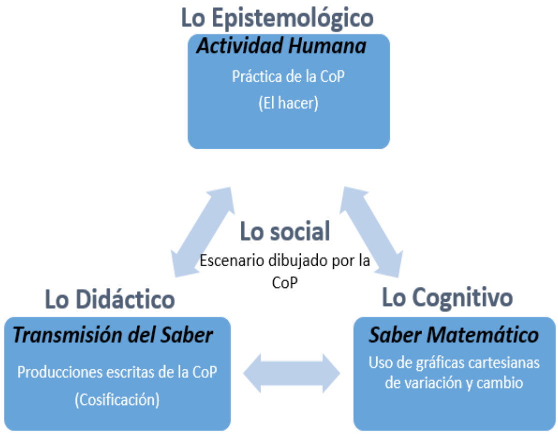
Se han encontrado dos grandes usos generales de la CoP para las gráficas: la organización de la información y el mostrar procedimientos y técnicas. Bajo este esquema general, presentamos a continuación tres casos ilustrativos de usos de las gráficas que tienen que ver con tareas específicas a realizar. Dentro de "Organización de la información", analizaremos las gráficas de líneas de balance (LDB) y las curvas de calibración del plomo y níquel en sedimentos marinos. Dentro de "Procedimientos y técnicas" se analizará el empleo de la técnica de líneas de balance para proyecciones de construcciones de viviendas.

4.1. Caso ilustrativo 1: gráfica de LDB

La tarea que enmarca este análisis de usos fue ordenar la información de un programa de obra en una gráfica de líneas de balance.

El programa de obra que se presenta se refiere a un proyecto de construcción de viviendas. En la parte superior de la figura 3 se muestra el cronograma de actividades respecto al plan de carácter indicativo para el proyecto de un proyecto y las actividades a realizar: cimentación, muros, loza y acabados. Se presenta el cronograma para cuatro viviendas y la duración de cada actividad se indica con las barras horizontales. Como puede verse, es factible que las actividades puedan hacerse en una misma fecha señaladas con flechas verticales.

Figura 2. Unidad de análisis.



Fuente: Montiel y Buendía, 2012.

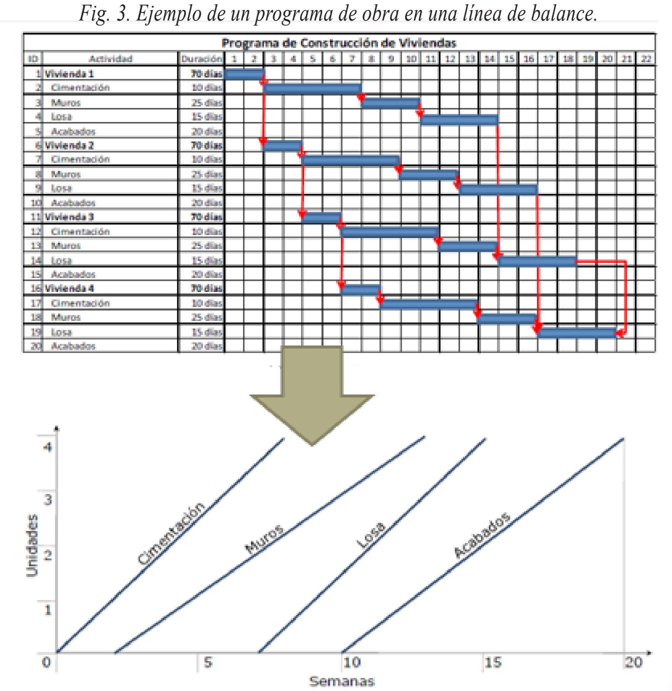
Loría (2013), doctor en Construcción, propone la gráfica de líneas de balance (LDB) para organizar la misma información de manera simplificada; permitiría además medir avances de programación (rendimientos) de actividades repetitivas con un enfoque de sistemas. La propuesta del experto consiste en una gráfica cartesiana en la que cada línea recta corresponde a cada actividad del programa de obra, que será llamada línea de balance, como se aprecia en la parte inferior de la figura 3. En el eje horizontal está el tiempo en semanas y en el eje vertical las cuatro viviendas consideradas en el caso ilustrado.

Podemos ver en la gráfica de las LDB que se muestra el "ritmo" de trabajo al cual deben ser realizadas todas las actividades que conforman un proyecto para concluirlo de acuerdo con lo programado; expresa tiempos planeados para la entrega de viviendas y cómo deben ser cumplidos esos tiempos (en términos de ritmos):

> [...] una gráfica de LDB no muestra relaciones directas entre actividades individuales; muestra una relación de resultados entre las diferentes operaciones y cómo cada operación debe ser completada a un ritmo particular para que la subsecuente proceda al ritmo requerido [Loria, 2013, p. 7].

El rendimiento es representado por la pendiente de los elementos lineales que representa el ritmo de ejecución de la actividad en cada uno de los elementos a construir. También se puede leer como conjunto: cómo debería ser una actividad con respecto a la otra. El "debería ser" se refiere a la relación entre las semanas transcurridas y las viviendas trabajadas.

Fig. 3. Ejemplo de un programa de obra en una línea de balance.



Fuente: Loría, 2013.

Analizando este uso, la *forma* de la gráfica organiza la información para identificar procesos que se repiten una y otra vez en las construcciones de casas y sistematiza tareas de una producción en masa en una lectura óptima que involucra una recta por tarea. Dichas rectas se distinguen unas de otras por el punto inicial y por sus pendientes: reflejan el ritmo de producción de cada actividad; es decir, cómo se espera que se desarrollen y reflejan también la coherencia entre actividades; por ejemplo, no puedo empezar con los muros de la vivienda uno hasta que su cimentación tenga su avance completo (aproximadamente en la segunda semana).

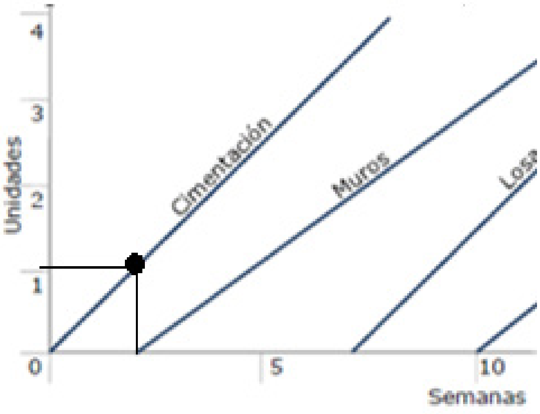
La gráfica *funciona* como un medio de optimización de la lectura para planear construcciones que demanden procesos que contienen actividades que se repiten. Esta planeación se da en términos de ritmos representados hipotéticamente por las pendientes de líneas rectas, así como por sus ordenadas al origen para marcar el inicio de cada actividad.

Diferentes elementos de lo lineal se están resignificando: la noción de pendiente y el significado de la ordenada a la origen de una recta; en particular, este último elemento se evidencia a través del significado de las intersecciones con el eje *x* para mostrar simultaneidad en las actividades. Esta resignificación se manifiesta al momento de la lectura global. Se pone en juego la noción de pendiente como ritmos de trabajo constantes, uniformes e invariantes. Estos ritmos son considerados dentro de una planeación de proyecto, tarea propia de la CoP que se asocia con la linealidad de las curvas manifestadas. Nótese cómo la herramienta visual hace de una organización de datos algo útil para la comunidad a través de lo lineal.

Otros elementos de la gráfica también están obteniendo significados a la luz de esta tarea y tomando en cuenta cómo son usados. Consideremos, por ejemplo, el punto coordenado que a continuación se señala en la figura 4. Aproximadamente será el punto (2,1).

Analizar de forma puntual estas LDB implicaría reconocer la relación entre tiempo de construcción con relación a una vivienda (la unidad 1 en este ejemplo). En ese tiempo es cuando la cimentación de la vivienda uno ha terminado y empieza

Figura 4. Uso de puntos clave.



Fuente: Loría, 2011.

el levantamiento de muros. Abriendo un poco el análisis y creando un intervalo alrededor del punto $t = 2$ podemos ver que antes de la segunda semana solo se está trabajando en la vivienda uno, y después en ambas viviendas. Este tránsito entre la forma de análisis puntual-intervalo permite desarrollar estrategias de variación y cambio en el que la gráfica se comunica con el usuario a través de lo que significa un punto coordenado. Esto funciona para que el plan de obra tenga coherencia en cuanto a las actividades sugeridas.

Los elementos propios de una gráfica cartesiana, como la etiqueta del eje horizontal, la etiqueta del eje vertical y la localización de un punto cartesiano, se resignifican trascendiendo del mero hecho de reconocer los elementos semióticos de una gráfica y de su estructuración como la representación de una función. Dichos elementos tienen una forma y un funcionamiento situacionales que enriquecen su significado con base en cómo son usados, en este caso para comunicar un plan de obra en cuanto a la coherencia y correcta ilación de las actividades de construcción necesarias.

4.2. Caso ilustrativo 2: curvas de calibración

La tarea se refiere a evaluar si la metodología con espectroscopía de absorción atómica por el método de flama es adecuada para determinar la existencia de plomo (Pb) o níquel (Ni) en sedimentos marinos de costas yucatecas (Aragón-Briceño *et al.*, 2011). El método analítico a emplear utiliza un equipo llamado espectrofotómetro para calentar, por medio de una flama, muestras de los sedimentos hasta convertirlos en gas (niebla atómica) y medir la absorbancia (cantidad de luz absorbida por el metal atomizado). Se cuantifica la concentración de dichos metales por medio de un haz de luz con lámparas específicas para cada metal, pues cada uno tiene su longitud de onda a la cual absorbe (Garay-Tinoco *et al.*, 2003). Para la validación de esta metodología se requieren cuatro características: linealidad, precisión, exactitud y límites de detección y cuantificación. Para este escrito solo se analizan ejemplos que utilizan gráficas para su estudio: linealidad y límites de detección.

Para considerar que los resultados obtenidos sean confiables se requiere la linealidad de la curva obtenida. Para ello se emplea un recurso gráfico llamado *curvas de calibración*, como las presentadas para Pb y Ni en la figura 5; en ellas, la cantidad de puntos en cada gráfica denota el número de muestras de sedimento marino con Pb y Ni experimentalmente tomadas. Para cada una de ellas se obtuvieron siete muestras a diferentes concentraciones (0.0, 0.3, 0.5, 1.0, 5.0 y 7.0 ppm, partes por millón), señaladas en el eje de las abscisas, las cuales arrojaron una medida de absorbancia en el eje de las ordenadas.

Cuatro de las siete muestras se tomaron en el intervalo de 0 a 1 ppm; es decir, con una concentración pequeña, porque las normas institucionales de validez indican que es el intervalo de mayor sensibilidad; si en ese intervalo los datos de la muestra se ajustan linealmente, el experimento es confiable, que es lo que se requiere para la hipótesis de la investigación.

Además de lo visual, los científicos comprueban el comportamiento de los puntos muestrales estadísticamente al proporcionar el coeficiente de correlación, el cual tiende a 1; esto quiere decir que las curvas de calibración mostraron linealidad, en el sentido de ajustarse a una línea recta.

Con apoyo de la gráfica, los investigadores primero deben validar el experimento al considerar lo que señalan las normas internacionales con base en el empleo de cuatro puntos de concentración en el intervalo cerrado (0,1) y tres más a 3, 5 y 7 ppm. En su experimento, los autores logran un intervalo amplio de fiabilidad en el que los datos se comportan linealmente:

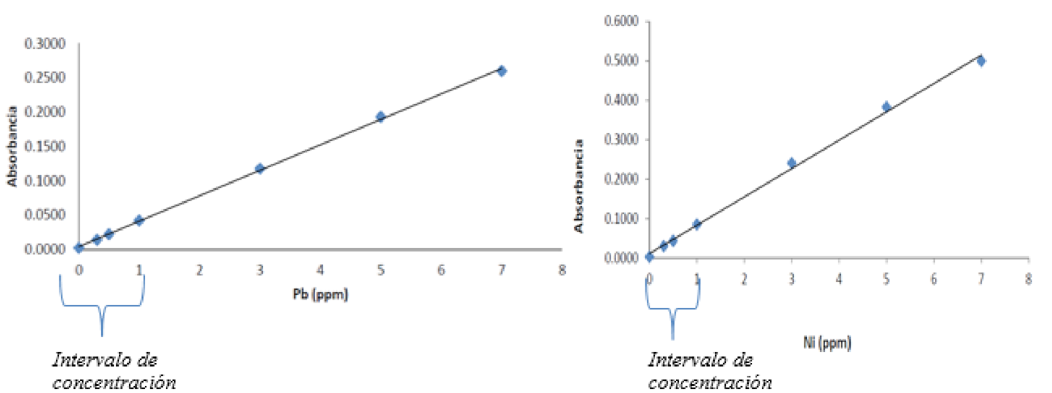
> […] el intervalo lineal que se maneja es muy amplio (0.3 ppm-7.0 ppm) y permite tener más seguridad de que la concentración de la muestra de sedimento marino sea cuantificable dentro de dicho intervalo [Aragón-Briceño *et al.*, 2011, p. 5].

La cuantificación que mencionan los autores es que los datos sobre la cantidad concentrada del Ni o Pb es confiable. Identificar visualmente el comportamiento lineal de los puntos obtenidos experimentalmente en este intervalo cerrado de gran amplitud, más allá del [0,1], permite comunicar a su comunidad la seguridad del experimento.

Nótese que el porcentaje de absorbancia (eje vertical) están en diferente proporción: los puntos de concentración del Pb están entre 0 y 0.05, mientras que los de Ni están entre 0 y 0.1.

Posteriormente, para completar la tarea, se analizan los límites de detección y cuantificación. Para la primera se realizó una comparación entre las medidas de las pendientes de las curvas de calibración. Se concluye que el Pb presenta dos órdenes de magnitud mayor respecto al Ni, lo cual se observa en la figura 5; esto se ve reflejado en la sensibilidad en el orden de miligramos por litro: "[…] Ni obtuvo una mejor sensibilidad, ya que presentó un límite de detección menor" (Aragón-Briceño *et al.*, p. 6). Esta conclusión se basa en el hecho de que la recta correspondiente al níquel tiene una mayor pendiente.

Figura 5. Curvas de calibración para plomo y níquel.



Fuente: Aragón-Briceño *et al.*, 2011.

La forma de la gráfica permite la comprobación de un buen muestreo por medio de un argumento visual referido a la linealidad de los datos, y en la comparación de estados de las dos gráficas con base en la magnitud de sus pendientes. Esta comprobación de un comportamiento lineal les funcionó para asegurar que el experimento sea legal y científicamente bien realizado; la comparación entre las rectas funciona para determinar la sensibilidad de las muestras con respecto a los metales, elementos fundamentales para la evaluación de la metodología a probar: un comportamiento lineal en las muestras apoya un muestreo de calidad del muestreo resultado del método elegido por los investigadores. Ello permite continuar en el estudio por medio de sugerencias, por ejemplo, respecto a la cantidad de muestras tomadas para la experimentación en comparación con las normas establecidas.

Al considerar el comportamiento lineal como base de la argumentación realizada se está resignificando la noción de pendiente como parte de la comprobación de hipótesis experimentales de la investigación, y con ello proponer un método de validación para los datos acorde a las normas: la linealidad en el intervalo de sensibilidad.

4.3. Ejemplo ilustrativo 3: técnica de LDB

Como se presentó anteriormente, LDB es una técnica gráfica que permite organizar la información necesaria para un proyecto de construcción de viviendas y permite apreciar, en un conjunto de líneas rectas, un gran número de actividades comunes. La pendiente de la recta representa el ritmo de trabajo bajo el cual debe realizarse todas las actividades que conforman el proyecto de ingeniería para concluirlo en un tiempo programado. Ello permite una justificación visual para que diversas actividades puedan llevarse a cabo –o no– simultáneamente. La localización de la recta, considerando simultáneamente ambos ejes, desarrollada argumentos de temporalidad y cantidad (de viviendas) para las actividades comunes (ver figuras 3 y 4).

Adicionalmente a este uso para organizar y presentar información, las LDB permiten predecir comportamientos del proceso en serie de construcción de viviendas. La tarea que presentamos a continuación es relativa al uso de las gráficas como procedimientos y técnicas para corregir la demora de avance real de un proyecto de construcción de viviendas.

En la figura 6 se presenta una técnica que permite visualizar y corregir la demora en el avance real de la obra de manera global y no solo por actividad o vivienda. Se presenta el proyecto de construcción de viviendas de fraccionamientos con avances reales (líneas punteadas) junto con el avance planeado (líneas continuas). Se presenta además una fecha de corte que se señala con una recta perpendicular al eje *tiempo*. En particular, un momento de análisis para la toma de decisiones por parte de los investigadores se refiere a los puntos de intersección de las LDB con dicha línea perpendicular (semana 12).

En primera instancia, y en un primer análisis de forma global, Loría enfatiza que esta técnica permite visualizar la recta continua como un ritmo de trabajo uniforme y constante, en contraste con el avance real, así como los retrasos que la obra sufre: hay un retraso de tres semanas en la terminación de la primera unidad, pues la actividad de acabados aún no ha finalizado (ver figura 7).

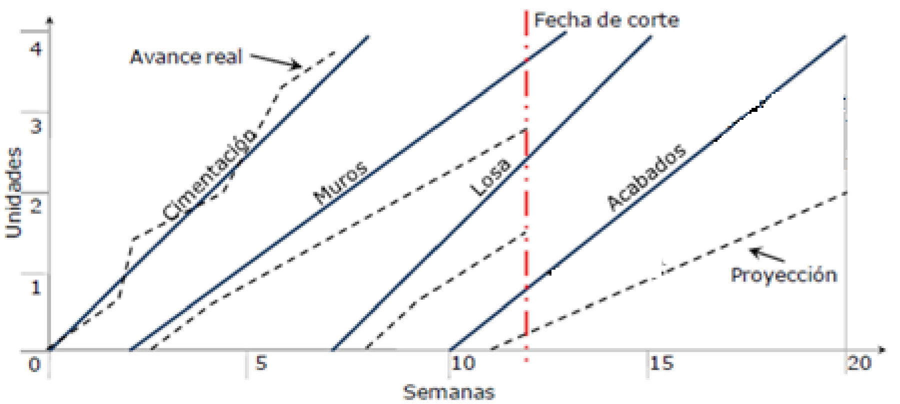
La forma en la que se interactúa con la gráfica se da a través de su lectura vertical, horizontal y la coordinación de ambas. Con respecto a la lectura vertical (de abajo hacia arriba), se identifica qué tan alejado está la línea punteada de la recta continua que sale del mismo punto inicial en el eje *x* (lo real contra lo planeado); ello permite visualizar el avance de cada actividad por vivienda. Por ejemplo, para el caso de los muros, se identifica la línea continua (avance programado) separada de la punteada (avance real), de tal forma que el avance real queda por debajo del supuesto; incluso la separación de las líneas es mayor a medida que avanza el tiempo.

Esta diferencia en el ritmo de trabajo puede llevar a una toma de decisión, como fue en el caso de la cimentación. El avance real estuvo por debajo del programado durante las primeras semanas, por lo que se decide incrementar el ritmo de realización, lo que se ve reflejado en el cambio de dirección de la línea punteada. Con esta medida, las líneas punteadas quedan por arriba del supuesto inicial, lo que lleva a disminuir nuevamente el ritmo de producción; estos tipos de ajuste se ven reflejados visualmente como trozos de rectas, con intención de tender a lo planeado (a la línea continua).

Bajo esta misma perspectiva vertical, las intersecciones –puntos clave– de la recta “fecha de corte” con las LDB (figura 6) se vuelven puntos clave para extrapolar con base al ritmo cómo se está alejando lo real de lo programado. Con base en la gráfica, los investigadores toman en consideración que la demora (rectas con menor pendiente en comparación con la planeada) podría corregirse al incrementar los ritmos de producción de los muros, la losa y acabados; para ello, entonces, hay que tomar decisiones, como la de incrementar la eficiencia o los recursos necesarios en aquella actividad donde no se está logrando la producción esperada.

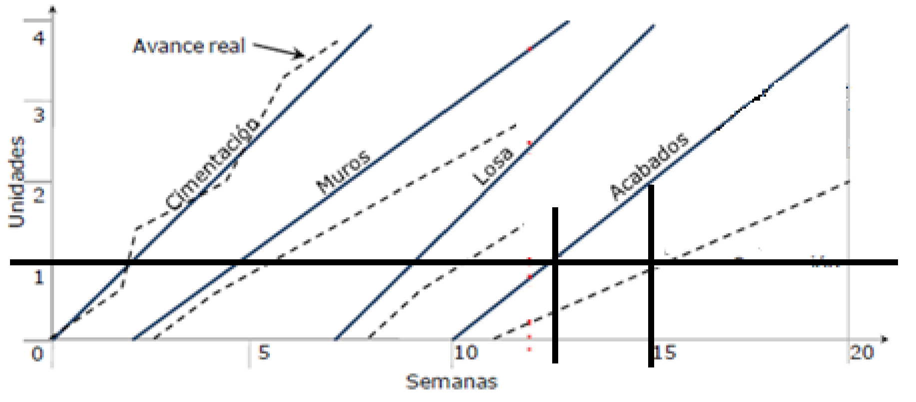
Si estos puntos clave se leen horizontalmente, puede realizarse el informe de avance respecto a las unidades de las viviendas. Por ejemplo, en la figura 8 puede

Fig. 6. Ejemplo de un programa actualizado con líneas de balance para la construcción de viviendas.



Fuente: Loría, 2013.

Figura 7. Un retraso de tres semanas.



Fuente: Loría, 2013.

observarse que en la fecha de corte, semana 12, los muros de la vivienda 4 debieron estar prácticamente terminados y, sin embargo, recién se están terminando los de la vivienda 3.

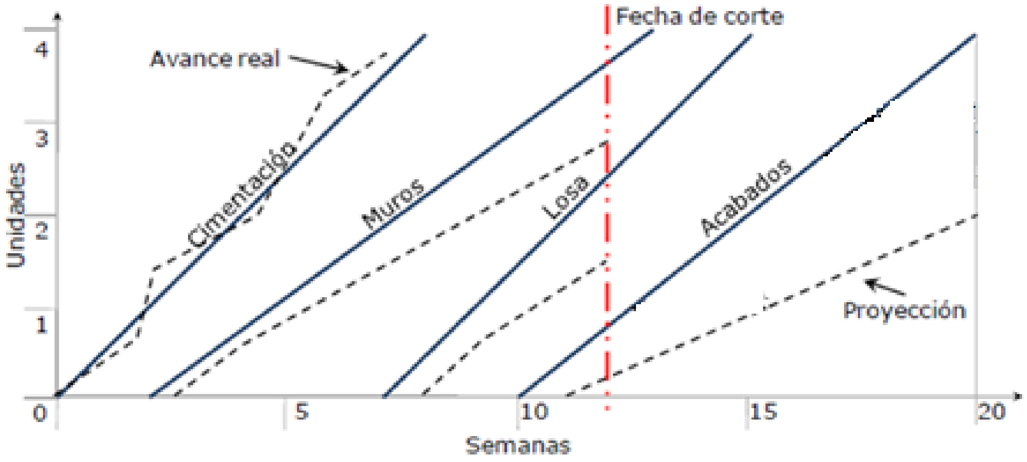
El funcionamiento es justo para tomar decisiones que permitan apegarse lo más posible a la planeación inicial y también para predecir, de acuerdo con el avance real, fechas de terminación del proyecto. Todo ello es de forma conjunta: en el tiempo, las viviendas y las actividades de construcción a considerar simultáneamente.

Este uso de la gráfica favorece una resignificación de la noción de pendiente como ritmo de producción. Es claro cómo un aumento o disminución del ritmo implica gráficamente una pendiente con una inclinación mayor o menor, respectivamente, para intentar aproximar lo real a lo hipotético. Podemos notar que a los investigadores no les interesa tener un ritmo mayor que el planeado, sino acercar la realidad al plan. Simultáneamente, los puntos de intersección se resignifican como puntos de referencia clave para la toma de decisiones, tanto en su lectura hacia el eje horizontal como hacia el vertical.

5. Discusión y comentarios finales

Las funciones lineales y sus gráficas son objetos matemáticos presentes en el currículo escolar desde el nivel básico. Sin embargo, el enfoque didáctico que se ha privilegiado ha sido el estudio de la función lineal enfatizando la adquisición de la noción pendiente a través de su fórmula asociada y de elementos como la intersección con el eje *y*; los significados para estos elementos de la función lineal suelen quedar ligados al aprendizaje de fórmulas. Se estudia la ecuación de la recta, su representación gráfica y, con suerte, se abordan modelos matemáticos asociados a la pendiente y a sus intersecciones con los ejes. Por ser un tema propio de la matemática básica, se suele creer que al abordarlo en esos niveles permite enseñarlo *de una vez y por todas*; de ahí en adelante se tratará entonces de *aplicaciones*.

Figura 8. Avance en los muros.



Fuente: Loría (2013).

Estudiar cómo el uso de las gráficas lineales significa elementos de lo lineal cambia el foco de atención de la adquisición del objeto (graficar una línea recta) hacia el desarrollo de prácticas como la graficación. Esta práctica se desarrolla a lo largo del sistema educativo y las gráficas son consideradas entonces como un saber continuo y funcional; son algo dinámico, temporal y evolutivo, un saber en uso con el que se desarrolla el razonamiento y permite la argumentación en diversas situaciones, con las cuales posee una relación dialéctica. Dejan de ser una entidad objetivada –y lista para aplicarse– para convertirse en una objetivable, sujeta a procesos continuos de resignificación que reflejan una matemática funcional.

En este escrito presentamos el uso de lo lineal, considerado como la gráfica más sus elementos asociados, en una comunidad de posgrado. En esta CoP se puede apreciar que los dos tipos de usos de las gráficas lineales ilustrados tienen en común funcionar como una herramienta visual de validación de resultados o comprobación de hipótesis. Las gráficas no son un fin en sí mismas, sino que tienen una intencionalidad de ser una herramienta visual e interesa saber de dónde se obtuvo, por qué, con qué fin, qué papel juega dentro de la comunidad. Esa es la fuente de resignificación para los elementos que caracterizan a lo lineal: la pendiente como una razón de cambio y la ordenada al origen.

La gráfica de LDB se usa para organizar información y para presentar una técnica de revisión de avance de obra, así como de corrección en los tiempos de la misma; un mismo objeto matemático –la gráfica– se usa de diferentes maneras, dependiendo de la tarea en la que está inmerso. De ella se pueden tener diversas significaciones, las cuales permiten generar un conocimiento matemático articulado sobre este objeto. Reconocer entonces los diversos funcionamientos y formas de un mismo objeto favorece su significación progresiva y, en consecuencia, un desarrollo de usos del conocimiento matemático.

En la comunidad de estudio, la significación de elementos de gráficas lineales se muestra no solo como primeros modelos para realizar análisis de comportamientos de fenómenos en la interpretación de ritmos o validación de hipótesis de las investigaciones de la CoP, sino también como ideales para planear y predecir sucesos; esto es linealizar fenómenos que por naturaleza no lo son.

Con ello se está resignificando la gráfica lineal: no es solo la representación de una función lineal que pasa por dos puntos, o su representación analítica; su uso contextual, sus elementos –como la pendiente y las intersecciones con los ejes– tienen también significados situados. Podemos entonces reconocer factible el cambio en el discurso matemático escolar de los objetos hacia las prácticas, pues son estas las que favorecen el uso del conocimiento matemático. En un contexto como la ingeniería, en el que la matemática se considera como una aplicación, favorecer usos y desarrollo intencional de prácticas plantea un cambio epistemológico. Es su uso al seno de una comunidad el que manifiesta un conocimiento matemático funcional.

En ese cambio, es factible entonces considerar al conocimiento matemático no como una acumulación de conocimientos: un conjunto de funciones cuyas gráficas podremos ir obteniendo. Más bien se trata de reconocer el uso situacional a lo largo de la escuela y proponer significaciones progresivas en los estudiantes: un objeto matemático no se aprende de una vez y para siempre; una gráfica lineal no es solo un tema para abordar en nivel básico y con ello ya se cumple el objetivo didáctico.

Si queremos proponer un desarrollo del pensamiento matemático, nuestra propuesta es hacia la resignificación continua de la matemática escolar considerando su uso en los diferentes escenarios educativos. En particular para las funciones y sus gráficas, esta resignificación reconoce las diferentes formas y funcionamientos de dicha gráfica desarrollándose a la luz de las nociones matemáticas involucradas –en una relación dialéctica– y, por lo tanto, se puede hablar de un desarrollo del pensamiento matemático en el aula.

Referencias

Aragón-Briceño, C., Ponce, C., Coronado, V. y Giacomán, G. (2011). Evaluación de un método analítico para la determinación de níquel y plomo en sedimento de mar por espectroscopía de absorción atómico. *Ingeniería. Revista Académica de la Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Yucatán*, *15*(1), 1-8.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meanings as a didactical task: The concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose y P. Olivero, *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-82). Nueva York, Estados Unidos: Mathematics Education Library Springer.

Buendía, G. (2010). Una revisión socioepistemológica acerca del uso de las gráficas. En G. Buendía, *A diez años del posgrado en línea en Matemática Educativa en el Instituto Politécnico Nacional* (pp. 21-40). Ciudad de México, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, *24*(2), 9-36.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). From History to Research in Mathematics Education: Socio-epistemological elements for trigonometric function. En V. Katz y C. Tzanakis, *Recent*

Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education (pp. 65-80). Washington, D.C., Estados Unidos: Mathematical Association of America.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama, A. Romo, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 285-309). Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC, Díaz de Santos.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L.M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero, A.R. Hernández, *Razonamiento matemático. Epistemología de la imaginación. (Re) pensando el papel de la epistemología educativa* (pp. 377-399). México: Gedisa, Cinvestav.

Cordero, F., Solís, M., Buendía, G., Mendoza, J. y Zaldívar, J.D. (2016), *El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica*, Ciudad de México, México: Gedisa.

Garay-Tinoco, J., Ramírez, G., Betancourt, J., Marín, B., Cadavid, B., Panizzo, L. y Franco, A. (2003). *Manual de técnicas analíticas para la determinación de parámetros fisicoquímicos y contaminantes marinos: aguas, sedimentos y organismos* (serie Documentos generales 13). Recuperado de http://www.invemar.org.co/redcostera1/invemar/docs/7010manualTecnicasanaliticas.pdf

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Nueva York, Estados Unidos: Cambridge University Press.

Loría, J. (2013). *Programación de obras con la técnica de líneas de balance*. Recuperado de http://www.ai.org.mx/ai/archivos/coloquios/regional-zona7/Programacion%20de%20Obras%20con%20la%20Tecnica%20de%20la%20Linea%20de%20Balance.pdf

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo, *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (pp. 61-88). Ciudad de México, México: Lectorum.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar.* Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(4-II), 319-333.

Tuyub, I. y Cantoral, R. (2012). Construcción social de conocimiento matemático: obtención de genes en una práctica toxicológica. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(42), 311-328.

Tuyub, I., Martínez, G. y Buendía, G. (2011). La comunidad de formación científica hacia una comunidad de práctica. En G. Buendía, *Reflexión e investigación en matemática educativa* (pp.159- 190). Ciudad de México, México: Lectorum.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona, España: Paidós.

Zaldívar, D. y Cordero, F. (2012). Un estudio socioepistemológico de lo estable: consideraciones en un marco de la divulgación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez y A. Oktaç, *Memorias del Primer Coloquio de Doctorado*, (pp. 203-212). Ciudad de México, México: Cinvestav.