

Recepción de artículo: 13 de Noviembre de 2013

Aceptación de artículo: 14 de Febrero de 2014

## Introducción a los Métodos Variacionales en Procesamiento de Imágenes: Filtros de Ruido

Carlos Brito Loeza<sup>a</sup>, Víctor Uc Cetina<sup>b</sup>, Anabel Martín-González<sup>c</sup>

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México

<sup>a</sup>carlos.brito@uady.mx, <sup>b</sup>ucetina@uady.mx, <sup>c</sup>amarting@uady.mx

### Abstract

Calculus of variations has been a fundamental mathematical tool along history. Many books have been written about this subject but just recently and very few contain information to solving image processing or computer vision problems. Unfortunately these books are highly technical and difficult to understand for the non expert reader. The present article represents an initial effort to introduce in detail the methodology to formulate fundamental problems of image processing through variational models. The reader will find inside this article, topics such as the mathematical methods of image representation, modeling techniques and methods of numerical implementation. The problem of image denoising on digital images has been selected to illustrate all of the above.

### Resumen

El cálculo variacional ha sido una herramienta matemática fundamental a lo largo de la historia. Muchos libros han sido dedicados a este tema pero son contados los que recientemente abordan técnicas variacionales para resolver problemas de procesamiento de imágenes o visión por computadora. Desafortunadamente estos libros son muy técnicos, y los temas que abordan son difíciles de entender para el lector no experto. El presente artículo, representa un esfuerzo inicial por presentar con detalle la metodología para formular problemas fundamentales del procesamiento de imágenes a través de modelos variacionales. Se presentan al lector los conceptos matemáticos básicos de representación, la etapa de modelación del problema y detalles de la implementación numérica. El problema de eliminación de ruido en imágenes digitales es usado para ilustrar todo lo anterior.

---

*Keywords and phrases* : Métodos variacionales, restauración de imágenes.

2010 *Mathematics Subject Classification* : 68U10, 65D18, 47A52

---

## 1. Introducción

El uso de técnicas variacionales para procesar imágenes tuvo su inicio a finales de los años setenta e inicialmente se aplicaron en la solución de problemas considerados básicos dentro del área de procesamiento

de imágenes como son: la *eliminación de ruido*, la *segmentación* (partición de una imagen en diferentes regiones) y el cómputo del *flujo óptico* (estimación del movimiento) en secuencias de imágenes o video [11]. Como consecuencia de los excelentes resultados obtenidos, hoy en día, el número de aplicaciones de estas nuevas técnicas se ha ampliado considerablemente, encontrándose entre las más populares: el cómputo de la función de transformación entre un par de imágenes, técnica conocida como *registramiento* o *alineamiento* de imágenes [12] y muy usada como herramienta de ayuda en el diagnóstico médico; la restauración de partes dañadas de una imagen, técnica conocida como *inpainting* [5] y utilizada por artistas gráficos; y la *super-resolución* [20] y *compresión* [27] de imágenes, las cuales son usadas en el almacenamiento y transmisión de imágenes digitales, entre otras.

Por considerarse la forma más simple de ilustrar estas técnicas, este artículo se concentra particularmente en un modelo variacional para la eliminación de ruido aditivo Gaussiano.

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 2 se presentan al lector las herramientas básicas que permitirán el fácil entendimiento del resto del texto; en la sección 3 se introduce el concepto de Modelo de imagen, e inmediatamente después, en la sección 4, el concepto de ruido. En la sección 5 se presenta al lector la modelación matemática del problema de eliminación de ruido. Seguidamente, en la sección 6 se presenta la modelación a través de métodos variacionales, y en la sección 7, la solución numérica de uno de éstos. Finalmente, en la sección 8 se presentan las conclusiones.

## 2. Representación de imágenes

Desde el punto de vista computacional, una imagen digital en escala de grises, es simplemente una colección de números almacenados en un arreglo bidimensional o matriz  $\mathbf{U} = [u_{i,j}]_{m \times n}$ , donde cada entrada del arreglo es conocida como un *pixel* de la imagen y su valor, el cual comúnmente representa el brillo o nivel de iluminación de dicho *pixel*, toma valores en un intervalo finito; siendo  $[0, 255]$  y  $[0, 1]$  los más usados.

De forma similar, las imágenes digitales a color, también conocidas como imágenes vectoriales, son representadas con arreglos multidimensionales  $\mathbf{U} = [u_{i,j,k}]_{m \times n \times p}$ , en donde cada canal o capa  $p$  (de dimensión  $m \times n$ ) puede tener diferentes interpretaciones que dependen del modelo de color seleccionado. Por ejemplo, cuando se usa el modelo de color RGB,  $p = 3$  y cada entrada del vector  $\mathbf{u}_{i,j}^{RGB} = (u_{i,j,1}, u_{i,j,2}, u_{i,j,3})$  representa la intensidad o brillo de cada uno de los colores: rojo (R), verde (G) y azul (B). En otros modelos como el CMYK,  $p = 4$  y cada canal se refiere a los componentes cian (C), magenta (M), amarillo (Y) y negro (K).

Cuando se trabaja con modelos variacionales, la representación computacional resulta ser insuficiente y se hace necesario contar con una representación matemática, a través de funciones, que caracterizen de forma adecuada las propiedades de la imagen. Por ejemplo, una imagen simple en escala de grises puede representarse como

$$u = u(x, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

donde es común asumir que  $u$  es al menos dos veces diferenciable, de manera tal que gradientes y curvatura de  $u$  están bien definidos para todo  $(x, y)$  en  $\Omega$ . Aquí  $u(x, y)$  representa el brillo de cada pixel con coordenadas  $(x, y)$ . Tomando como base esta representación, las imágenes pueden ser vistas como:

- Colecciones de conjuntos de nivel de  $u(x, y)$ .
- Superficies caracterizadas por  $(x, y, u(x, y))$ .

### 2.1. Imágenes como una colección de conjuntos de nivel

Considérese una imagen en escala de grises como una función  $u$  con las características antes descritas, y defínase el conjunto de nivel

$$\gamma_\lambda = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = \lambda\}$$

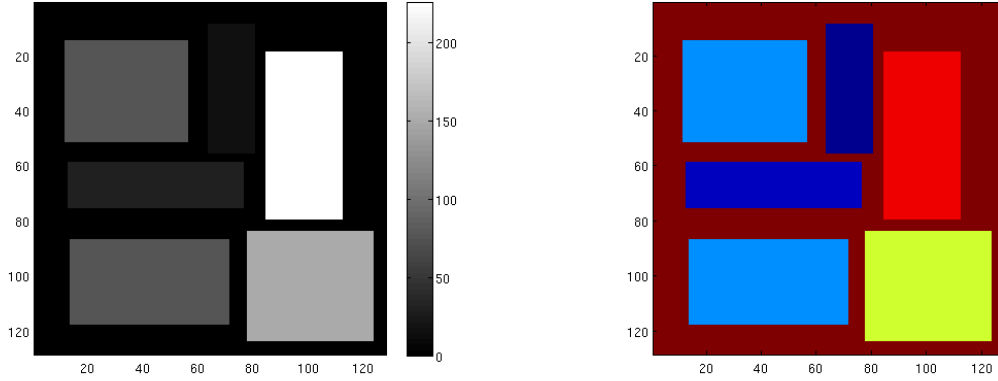


Figura 1: (a) Imagen original en escala de grises. El tamaño de la imagen es de  $128 \times 128$  píxeles y toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ . (b) Vista de los conjuntos de nivel de la imagen en una representación bidimensional.

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De esta forma es posible representar  $u$  como la familia o colección de todos los conjuntos de nivel que dependen del parámetro  $\lambda$  de la siguiente forma:

$$\Gamma_u = \{\gamma_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

En esta representación [8], el dominio de la imagen  $\Omega$  es particionado como  $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \gamma_\lambda$  con  $\gamma_\lambda \cap \gamma_\mu = \emptyset$  para  $\lambda \neq \mu$ . Nótese que con este tipo de representación, el vector normal a cada conjunto de nivel  $\lambda$  está definido por  $\nabla u$ . Dado que la curvatura de una curva, representada por  $\kappa_{CN}$ , está definida como la razón de cambio del vector unitario normal a la curva, tenemos que

$$\kappa_{CN} = \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|}. \quad (2.2)$$

La Figura 1 muestra una imagen en escala de grises y algunos de sus conjuntos de nivel.

## 2.2. Imágenes como superficies

Otra representación se obtiene si se entiende una imagen como la superficie definida por  $(x, y, u(x, y))$ . En este caso, la función

$$\phi(x, y, z) = u(x, y) - z,$$

define el conjunto de nivel cero  $\Gamma_0 = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = 0\}$ , el cual corresponde a la superficie definida por  $z = u(x, y)$ . De esta forma, la curvatura de la superficie puede ser expresada como

$$\kappa_S = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2.3)$$

y dado que  $\nabla \phi = (u_x, u_y, -1)$  y  $|\nabla \phi| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} = \sqrt{|\nabla u|^2 + 1}$  se obtiene la siguiente expresión en términos de  $u$  solamente:

$$\kappa_S = \nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}}. \quad (2.4)$$

En la Figura 2 se muestran dos vistas, desde diferentes ángulos, de la imagen de la Figura 1 representada como una superficie.

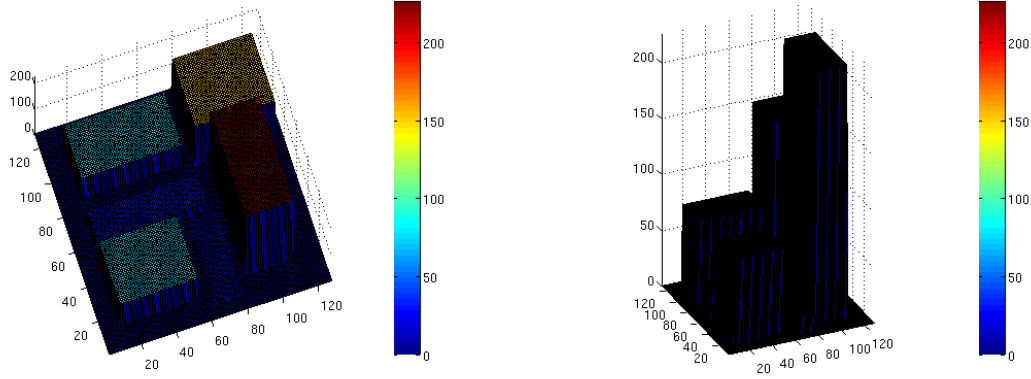


Figura 2: Dos vistas diferentes de la superficie que define la imagen de la Figura 1.

### 3. Modelo de imagen

Las representaciones de conjuntos de nivel y superficies cumplen el objetivo de describir las propiedades de una imagen cualquiera. Sin embargo, cuando se requiere realizar algún procesamiento, como pudiera ser filtrar ruido, se vuelve necesario describir, de alguna forma, las propiedades *deseadas* que la imagen debiera tener al final del procesamiento.

En los métodos variacionales esto se logra usando herramientas del análisis funcional<sup>1</sup>. En esta sección se describirán dos de las herramientas más representativas para lograr esto: funciones de Sobolev y funciones de variación acotada.

#### 3.1. Funciones de Sobolev

Entiéndase como función Sobolev aquella que pertenece a un espacio de Sobolev [19]. Este tipo de espacio de funciones usualmente es representado como  $W^{k,p}(\Omega)$ , donde al número  $k$  se le conoce como el orden del espacio,  $1 \leq p \leq +\infty$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Este espacio se define como el conjunto de todas las funciones  $u \in L^p(\Omega)$  cuya derivada débil<sup>2</sup>  $D^\alpha u$  pertenece a  $L^p(\Omega)$  para cada índice  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k$ . Esto es

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}. \quad (3.1)$$

En el caso de modelos de imagen, uno de los primeros modelos propuestos surge de usar  $p = 2, k = 1$ . De esta forma, la minimización en  $W^{1,2}$  del cuadrado de la norma  $L^2$  del gradiente de la imagen  $\nabla u$  lleva al siguiente problema variacional

$$\min_{u(x,y)} \int_{\Omega} |\nabla u(x,y)|^2 dx dy \quad (3.2)$$

Es bien conocido que la ecuación de Euler para esta funcional lleva a resolver la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \text{ en } \Omega \\ \nabla u(x,y) \cdot \nu &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

con el vector normal unitario  $\nu$  en la frontera  $\partial\Omega$ .

Es claro que la solución de (3.3) implica que  $u(x,y)$  debe ser al menos dos veces diferenciable.

<sup>1</sup>El análisis funcional, de forma muy genérica, es la rama de las matemáticas que estudia espacios vectoriales, su estructura y los operadores lineales que actúan sobre dichos espacios.

<sup>2</sup>Derivada débil es una generalización del concepto de derivada de una función para funciones no diferenciables pero sí integrables.

### 3.2. Funciones de variación acotada

Una solución al problema anteriormente descrito es el uso de funciones que permitan penalizar el ruido pero al mismo tiempo preserven los bordes. Un ejemplo de dicha función son las funciones de variación acotada. Se procederá a presentar los conceptos de *funciones de variación acotada* y *variación total de una función*, los cuales, aún cuando han sido ampliamente estudiados en el área de análisis funcional, su uso para la caracterización de las propiedades de una imagen es muy reciente. Su importancia radica en que si una imagen  $u \equiv u(x, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tiene *variación total*, la energía contenida en ella es acotada, y sin embargo, esto no restringe la posibilidad de que dentro de la imagen puedan existir puntos  $(x, y)$  donde  $u$  localmente cambia repentinamente de valor una cantidad considerable. Estos puntos pueden ser fácilmente caracterizados observando el valor de  $|\nabla u(x, y)|$ . Recuérdese que variaciones en  $u$  representan cambios en el brillo de la imagen, y por tanto, en aquellos puntos  $(x, y)$  donde  $|\nabla u| \gg 0$  son fuertes candidatos<sup>3</sup> a pertenecer a los bordes de las figuras u objetos presentes en la imagen. Es bien sabido que los bordes en una imagen proporcionan información visual muy importante, y por lo tanto, es altamente deseable contar con un modelo de función que permita su correcta representación matemática y los preserve a lo largo del procesamiento de la imagen sin importar la naturaleza del mismo.

Cabe mencionar que el modelo de imagen como función de variación acotada no es el único que ha sido propuesto en la literatura, pero sí es un modelo emblemático que marcó un parteaguas en la investigación de técnicas de procesamiento de imágenes, ya que atrajo fuertemente la atención de matemáticos hacia este campo que, hasta ese momento, sólo era considerado como un problema computacional o de ingeniería.

Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y  $u \in L^1(\Omega)$ , se define la variación total de  $u$  como

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, d\mathbf{x} : \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{C}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)^n \text{ y } \|\varphi_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

para  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$   $\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ ,  $d\mathbf{x}$  es la medida de Lebesgue<sup>4</sup> y  $\mathcal{C}_0^1(\Omega)^n$  es el espacio de funciones continuamente diferenciables con soporte compacto en  $\Omega$ . Note que todos los componentes de  $\varphi$  tienen norma  $L^\infty(\Omega)$  menor que uno.

En [10], y para el caso particular cuando  $u \in C^1(\Omega)$ , se muestra que

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi_i \, d\mathbf{x} \tag{3.4}$$

para cada  $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)^n$ , y por lo tanto

$$\int_{\Omega} |Du| = \int_{\Omega} |\nabla u| \, d\mathbf{x}. \tag{3.5}$$

Una función  $u \in L^1(\Omega)$  se dice que tiene variación total acotada en  $\Omega$  si  $\int_{\Omega} |Du| < \infty$ . Se define  $BV(\Omega)$ <sup>5</sup> como el espacio de todas las funciones en  $L^1(\Omega)$  con variación acotada.

A continuación, se presentan dos ejemplos ilustrativos para el caso unidimensional.

Las funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  y  $f_3(x)$  definidas abajo pertenecen al espacio  $BV(\Omega)$  con  $\Omega = [0, \pi/2]$ .

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_2(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{para } 0 \leq x < \pi/8 \\ 1/2 & \text{para } \pi/8 \leq x < \pi/4 \\ 3/4 & \text{para } \pi/4 \leq x < 3\pi/8 \\ 1 & \text{para } 3\pi/8 \leq x < \pi/2 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{2x}{\pi}. \tag{3.6}$$

<sup>3</sup>Cabe remarcar que no es suficiente que en un punto dado  $(x, y)$  la magnitud del gradiente sea mucho mayor a cero para que dicho punto sea considerado parte de un borde en una imagen; es necesario también que la magnitud del gradiente, en varios puntos dentro de su vecindad, tengan valores similares y que, en conjunto, formen un contorno suave o que posean una estructura espacial.

<sup>4</sup>En espacios Euclidianos, la forma estándar de asignar una *medida*, como pudiera ser longitud, área, o volumen a un conjunto dado, es a través de la medida de Lebesgue. En análisis real, esta medida es usada para definir el método de integración de Lebesgue.

<sup>5</sup>Se usa  $BV$  por ser las siglas en inglés de Bounded Variation.

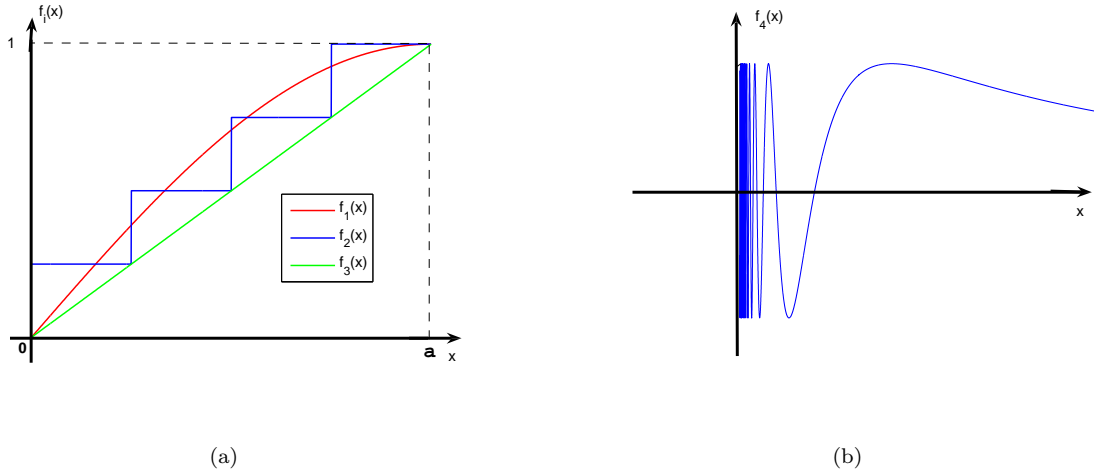


Figura 3: (a) Ejemplo de tres funciones diferentes con la misma variación total e igual a uno. (b) Ejemplo de una función con variación total infinita.

Dado que  $f_1, f_2$  y  $f_3$  son todas funciones monotónicas<sup>6</sup>, todas tienen la misma variación total igual a uno<sup>7</sup>. Sin embargo, sólo  $f_1$  y  $f_3$  son funciones continuas y diferenciables en  $\Omega$  (Figura 3(a)).

Como segundo ejemplo, considérese la función  $f_4(x)$  definida como

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ \sin(1/x) & \text{para } 0 < x \leq a \text{ con } a > 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Aquí  $\Omega = [0, a]$  para cualquier  $a > 0$ . La gráfica de esta función se muestra en la Figura 3(b). Se aprecia que cuando  $x \rightarrow 0$  la frecuencia de las oscilaciones de  $f_4$  se incrementa, esto es, mientras más se acerca  $x$  al cero, mayor es el número de variaciones que deben ser consideradas en la integral (3.5) y, por lo tanto, el valor final de ésta crece indefinidamente. Por esta razón, la función tiene variación total infinita y, por lo tanto, no pertenece al espacio  $BV(\Omega)$ . Sin embargo, nótese que  $f_4$  sí tiene variación acotada en  $[a, b]$  para cualquier  $a > 0$ .

## La fórmula de co-área

La fórmula de co-área es una poderosa herramienta para el análisis de funciones BV. Esta fórmula provee una conexión natural entre la variación total de una función  $u$  que representa una imagen y el perímetro de los conjuntos de nivel de la misma. Es común referirse a  $\int_{\Omega} |\nabla u| \, d\mathbf{x}$  como el modelo de imagen de variación total o simplemente modelo TV<sup>8</sup>.

**Definición 3.1 (Perímetro).** Sea  $E$  un conjunto de Borel<sup>9</sup> y  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Defínase el perímetro de  $E$  en  $\Omega$  como

$$Per(E, \Omega) = \int_{\Omega} |D\chi_E| = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} : \boldsymbol{\varphi} \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \text{ y } |\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})| \leq 1 \text{ para } \mathbf{x} \in \Omega \right\}, \quad (3.8)$$

<sup>6</sup>En cálculo, una función  $f$  es llamada monotónica si para todo  $x$  y  $y$ , donde  $x \leq y$ , se tiene que  $f(x) \leq f(y)$ , esto es,  $f$  preserva el orden.

<sup>7</sup>La variación total de una función monotónica de variable real  $f$  en un intervalo  $(a, b)$  está dada por  $|f(b) - f(a)|$ , [21].

<sup>8</sup>por ser las siglas en inglés de Total Variation.

<sup>9</sup>Dado  $X$  algún espacio topológico, se dice que  $E \subset X$  es un conjunto de Borel si  $E$  puede ser obtenido usando un número contable de operaciones, empezando por conjuntos abiertos, y cada operación consistiendo en uniones, intersecciones y complementos [23, 2].

donde

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in E \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega - E \end{cases} \quad (3.9)$$

es la función indicadora de  $E$ .

**Definición 3.2 (Fórmula de co-área).** Sean  $u = u(\mathbf{x})$  y  $f = f(\mathbf{x})$  dos funciones escalares definidas en  $\mathbb{R}^n$ . Asíumase que  $u$  es una función Lipschitz continua y que para casi toda  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el conjunto de nivel  $L_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : u(\mathbf{x}) = \lambda\}$  es una hipersuperficie suave de  $n - 1$  dimensiones en  $\mathbb{R}^n$ . Asíumase también que  $f$  es continua e integrable. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| f \, d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{L_\lambda} f \, ds \right) d\lambda. \quad (3.10)$$

Para el caso particular cuando  $f = 1$  y la región de integración es un subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \, d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{L_\lambda} ds \right) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Per}(L_\lambda, \Omega) \, d\lambda. \quad (3.11)$$

Si se considera  $u(\mathbf{x})$  como la función que representa una imagen que toma valores en el intervalo  $[0, 1]$  y se selecciona una rebanada (conjunto de nivel) de  $u$  de la siguiente forma:  $u(\mathbf{x}) = \lambda$ , la rebanada seleccionada de esta forma, representa el dominio de nivel  $\lambda$  definido como  $L_\lambda = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 : u(\mathbf{x}) = \lambda\}$  para  $\lambda \in [0, 1]$ . Por lo tanto, de acuerdo a (3.8) el perímetro de cada rebanada de  $u$  está dado por

$$\text{Per}(L_\lambda, \Omega) = \int_{\Omega} |D\chi_{L_\lambda}|. \quad (3.12)$$

Y haciendo uso de la fórmula de co-área se obtiene finalmente

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \text{Per}(L_\lambda, \Omega) \, d\lambda. \quad (3.13)$$

Este fantástico resultado muestra que la variación total de una imagen es simplemente la suma de la longitud de cada uno de sus conjuntos de nivel. De esta forma, la contribución de todas las discontinuidades (saltos) de la imagen son tomadas en consideración al calcular el valor de la integral, asegurando la contribución de los bordes en el modelo TV. Esto no sucede en otros modelos de imagen donde los bordes son altamente penalizados; el uso de estos modelos en el procesamiento de la imagen generalmente da como resultado bordes no definidos. Un ejemplo de este tipo de modelos es  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}$ .

Un ejemplo de imagen y su representación en conjuntos de nivel es ilustrado en la Figura 4, donde la imagen en (a) está definida por la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(x-64)^2 + (y-64)^2}/128 & (x, y) \in \Omega \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ 0.6 & (x, y) \in \Omega_1 \\ 0.7 & (x, y) \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

con  $\Omega = [0, 128]^2$ ,  $\Omega_1$  el anillo acotado por los círculos  $(x-64)^2 + (y-64)^2 = 14^2$  y  $(x-64)^2 + (y-64)^2 = 26^2$ ,  $\Omega_2$  el anillo acotado por este último y  $(x-64)^2 + (y-64)^2 = 38^2$ . En la Figura 4(b) se muestra la representación en tres dimensiones de la imagen y algunos de sus conjuntos de nivel.

## 4. Ruido

Desde el punto de vista de la mecánica estadística, el ruido es intrínseco a cualquier sistema multicuerpos. En análisis y procesamiento de imágenes y en sistemas de visión, ejemplos de este tipo de sistemas pueden

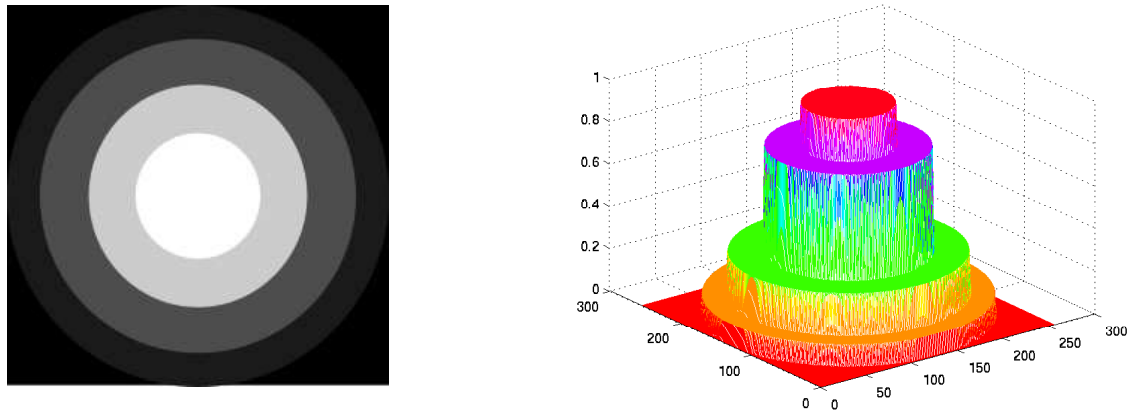


Figura 4: De izquierda a derecha, se presenta una imagen sintética  $u(\mathbf{x})$  y las  $\lambda$ -curvas donde  $u(\mathbf{x}) = \lambda$ , para  $\lambda \in [0, 1]$ .

ser: el flujo de electrones a través de un componente o circuito eléctrico o el haz de fotones que impactan en la retina del ojo y el consecuente flujo de iones que se propagan por las membranas del sistema visual.

En estos sistemas, el ruido puede tener diferentes causas, como por ejemplo:

- La no uniformidad del medio, en términos de densidad, temperatura e índice de refracción por donde se propaga la luz.
- Movimientos y no uniformidad del material o tejido que se está procesando.
- Radiación infraroja y variaciones de temperatura del entorno.
- Variaciones de temperatura, composición física y química de los objetivos y de los componentes electrónicos de los dispositivos de captura.

En general, el ruido resulta de la posibilidad de que una señal enviada,  $x$ , sea diferente a la señal recibida, y éste tenga una probabilidad condicional de distribución (FDP) que dependa de  $x$ . Cuando la FDP tiene una distribución normal, se dice que el ruido es Gaussiano. La FDP de una variable aleatoria Gaussiana  $z$  está dada por

$$p_G(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde, en el caso de que  $z$  sea entendida como una imagen, representa el nivel de gris o brillo en cada pixel,  $\mu$  el valor medio y  $\sigma$  la desviación estandar. Un caso especial de ruido es el ruido blanco Gaussiano, en el cual, los valores en dos instantes dados cualquiera están idénticamente distribuidos y son estadísticamente independientes.

Como puede observarse, en una imagen con ruido, éste puede identificarse como variaciones o cambios repentinos en los niveles de gris. Por lo tanto, la derivada en aquellas regiones de la imagen con ruido adquiere valores más altos que los obtenidos en aquellas regiones sin ruido. Esta propiedad, indica que modelos de imagen basados en funciones Sobolev o de variación acotada, capturan de forma natural la energía<sup>10</sup> contenida en la imagen.

<sup>10</sup>Entiéndase por energía, desde el punto de vista clásico de la termodinámica, como una magnitud escalar dependiente de la entropía del sistema y que indica la capacidad de este sistema para realizar un trabajo. En este caso, imágenes con mayor cantidad de ruido tendrán mayor energía y viceversa.



## 5. Modelación matemática del problema

Una vez definido el modelo de imagen vía variación total, por ejemplo, es necesario modelar el problema que se pretende resolver. Esto por lo general se lleva a cabo definiendo un problema de minimización sobre una energía que represente de forma adecuada el problema físico con el cual se está trabajando. Este proceso de minimización comúnmente lleva a resolver un problema inverso, ejemplificado a continuación.

### 5.1. Problemas inversos

Es común, en métodos variacionales en visión computacional, tener que afrontar problemas inversos, esto es, problemas donde los valores de algunos parámetros del modelo deben ser obtenidos a partir de los datos observados. Generalmente, la dificultad con este tipo de problemas es que están mal planteados<sup>11</sup>, siendo las condiciones de estabilidad y unicidad de la solución las que comúnmente no se cumplen.

El ejemplo clásico para ilustrar un problema inverso es la integral de Fredholm de primer grado

$$f(x) = \int_a^b g(x, y)h(y) dy,$$

donde  $g(x, y)$  es una función conocida y diferenciable, y la tarea es inferir  $h(y)$  a partir de los datos  $f(x)$ . Si el mapeo es solamente inyectivo, entonces la inversa no será continua, y por lo tanto, pequeños errores en la medición de los datos  $f(x)$  producirán errores de gran magnitud en la solución  $h(y)$ . En este sentido el problema está mal planteado.

Un segundo ejemplo, extraído del campo de procesamiento de imágenes, es el siguiente: considérese la función  $u^0$  como una imagen ruidosa definida en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  obtenida añadiendo ruido Gaussiano  $\eta$  a una imagen libre de ruido  $u$ . La ecuación  $u^0 = u + \eta$  representa este proceso. Ahora, considérese el problema inverso de inferir  $u$  dado que sólo se dispone de  $u^0$ , lo cual también puede ser visto como eliminar el ruido  $\eta$  de  $u^0$ . Si se asume que el ruido  $\eta$  tiene media cero y que la varianza  $\sigma^2$  es conocida o puede ser estimada, el problema de estimar  $u$  puede ser formulado desde el punto de vista variacional de la siguiente forma:

$$\min_u \left\{ \left| \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx dy - \sigma^2 \right| \right\}. \quad (5.1)$$

No es difícil observar que la solución al problema de minimización planteado arriba no es única ya que pequeños cambios en la distribución del ruido darán como solución imágenes completamente diferentes. Por lo tanto, se concluye que (5.1) es un problema mal planteado.

### 5.2. Regularización

Regularización es una técnica utilizada para transformar problemas mal planteados en problemas bien planteados. Tikhonov *et al.* [26] introdujo esta técnica cuya idea básica es añadir una nueva restricción al problema original, obligando que la solución sea seleccionada de entre un conjunto específico de posibles soluciones. Utilizando la técnica de Tikhonov, el problema (5.1) puede ser *regularizado* de la siguiente forma:

$$\min_{u \in L^2} \left\{ \int_{\Omega} |u - u^0|^2 dx dy + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \right\}. \quad (5.2)$$

<sup>11</sup>El matemático de origen francés Jacques Hadamard, dió la siguiente definición que prevalece: un problema bien planteado es aquel que cumple los siguientes requisitos:

1. la solución al problema existe,
2. la solución es única y
3. la solución depende continuamente de los datos (condición de estabilidad).

Si alguna de estas condiciones falla, entonces se dice que el problema está mal planteado.

El primer término en (5.2) es una medida de similitud entre  $u$  y  $u^0$ . El segundo es el término de regularización, el cual, en este ejemplo, fue añadido para forzar que la solución tenga ciertas propiedades como impedir que  $u$  presente oscilaciones que, en este caso, representan el ruido, y por lo tanto, éste pueda ser removido de  $u^0$ .

Como puede observarse, un nuevo parámetro  $\alpha$  fue introducido en el problema. Este parámetro actúa como un multiplicador de Lagrange y su valor, en este caso, cuantifica la cantidad de ruido a ser removido. Note que seleccionando  $\alpha \rightarrow \infty$  dará lugar a que  $u$  sea una solución de valor constante.

Aunque el valor de  $\alpha$  puede ser seleccionado manualmente, este proceso puede ser automatizado usando, por ejemplo, el método de la curva  $L$ [14, 15, 13, 28] o el método del principio de discrepancia de Morozov [25, 28, 1].

Otros términos regularizadores, diferentes al propuesto por Tikhonov, pueden también ser usados. Esto dependerá de las propiedades de la imagen. Por ejemplo, un caso es cuando la imagen es sintética y constante a pedazos, otro es cuando la imagen tiene mucha textura o si hay ausencia de bordes bien marcados. En el caso de la eliminación de ruido que se plantea arriba, la propuesta de Tikhonov de usar  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy$  de forma general no es la que da los mejores resultados, ya que tiende a crear bordes difusos. Como se mostrará más adelante, el modelo de variación total introducido con anterioridad es una mejor selección.

## 6. Eliminación de ruido aditivo a través de métodos variacionales

Se procederá a estudiar el problema fundamental de eliminación de ruido en una imagen. La solución de dicho problema es de relevancia dado que las imágenes digitales normalmente se encuentran contaminadas con cierto nivel de ruido, siendo las causas principales de esto, las expuestas con anterioridad. La eliminación de ruido en imágenes es un campo de investigación que ha sido de enorme interés durante las últimas décadas. Imágenes digitales se ven expuestas a ruido desde el mismo momento en que son capturadas por dispositivos digitales, ya sean cámaras, escáners, etc. El ruido tiene diversos orígenes y ningún proceso está libre de él. Básicamente, el ruido puede ser descrito como variaciones de distribución aleatoria. En imágenes digitales el ruido se aprecia como variaciones en el brillo que no tienen algún patrón particular. Es por esto que una imagen ruidosa se ve granulada o como si nieve muy fina estuviera presente en ella. Una de las repercusiones inmediatas debido a estas variaciones, es la reducción de la calidad de la imagen haciendo muy difícil identificar objetos pequeños o de bajo contraste contenidos en esta.

En el presente trabajo, solamente serán consideradas imágenes contaminadas con ruido aditivo Gaussiano. Este tipo de ruido varía espacialmente, es decir, de una región a otra del dominio, y es independiente de la intensidad de la señal. El ruido Gaussiano principalmente es causado por ruido térmico en los componentes electrónicos de los dispositivos digitales de captura. Haciendo uso de la representación de una imagen como una función bidimensional  $u = u(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , una imagen ruidosa  $u^0 = u^0(x, y)$  se define como

$$u^0(x, y) = u(x, y) + \eta(x, y), \quad (6.1)$$

donde  $\eta = \eta(x, y)$  es el ruido aditivo desconocido.

El objetivo de la eliminación del ruido puede ser alcanzado por métodos tradicionales como son los filtros lineales, que aunque son muy sencillos de implementar, generalmente degradan los bordes de los objetos de la imagen, los cuales se ven como desenfocados al final del proceso. Una mejor técnica es el uso de filtros no lineales de difusión anisotrópica, ya que éstos aplican diferentes niveles de difusión dentro de la imagen. Este texto se centrará únicamente en técnicas variacionales, las cuales, no solamente han mostrado dar excelentes resultados en muchas ocasiones, sino que desde el punto de vista matemático, resultan ser de mucho interés. Aún más, una gran cantidad de esfuerzo de investigación ha sido llevado a cabo sobre estas técnicas en los últimos años, lo que ha dado lugar a la apertura de muchas líneas de investigación con problemas que aún esperan ser resueltos.

A partir de ahora, la imagen ruidosa, la cual es el único conjunto de datos disponible, será representada por  $u^0$ . En métodos variacionales, una funcional es definida para representar cierta energía contenida en el dominio de los datos y ésta es minimizada. Por ejemplo, si consideramos el caso de ruido aditivo, una

posibilidad es usar el cuadrado de la norma  $L^2$  del ruido  $\eta = u^0 - u$  como la energía a minimizar, esto es:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} |u^0 - u|^2 dx dy \equiv \|u^0 - u\|_2^2 \right\}. \quad (6.2)$$

Aunque ésto tiene perfecto sentido, la minimización directa de (6.2) no es tan sencilla como aparenta. La razón principal, como ya fue comentado, es el ruido presente en  $u^0$ , el cual hace que para pequeños cambios en la distribución del ruido se obtengan soluciones  $u$  completamente diferentes. Por lo tanto, es necesario usar técnicas de regularización para seleccionar la clase de soluciones  $u$  que mejor representan la imagen libre de ruido buscada. Esto es, en lugar de minimizar (6.2), es mejor encontrar

$$\min_u \left\{ F(u) \equiv \underbrace{\alpha \int_{\Omega} \Phi(u) dx dy}_{\text{regularizador}} + \underbrace{\int_{\Omega} |u - u^0|^2 dx dy}_{\text{proximidad}} \right\}, \quad (6.3)$$

donde usualmente  $\Phi(u) \geq 0$ . La idea del término regularizador introducido en (6.3) es dar estabilidad al problema; más aún si el regularizador es una funcional convexa, la unicidad de la solución en (6.3) está garantizada. El parámetro  $\alpha$  conocido como *parámetro regularizador*, hace la función de un multiplicador de Lagrange, y por lo tanto, para diferentes valores de  $\alpha$  se obtendrán diferentes soluciones. El problema de encontrar el mejor valor del parámetro regularizador es de gran importancia y una línea de investigación todavía abierta.

## 6.1. El modelo de variación total

El modelo TV propuesto en [22] no solamente genera excelentes resultados, sino que por la forma, a través del cálculo de variaciones en que éste es formulado, facilita enormemente el análisis de sus propiedades matemáticas. Este modelo propone minimizar la siguiente funcional:

$$\min_{u \in BV} \left\{ E(u) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u^0|^2 dx dy \right\}, \quad (6.4)$$

donde esta vez  $\lambda$  es el parámetro positivo que selecciona la cantidad de ruido a ser removido. En este caso, ambas funcionales en (6.4) son convexas, por lo que la existencia y unicidad de la solución están garantizadas [6].

La minimización de (6.4) puede efectuarse directamente como en [7], o resolviendo la ecuación diferencial parcial de segundo orden que resulta de la condición de primer orden para (6.4). Esta última se obtiene primero definiendo  $\varphi \equiv \varphi(x, y)$  como una función infinitamente diferenciable y con soporte compacto en  $\Omega$  y  $\varepsilon$  como un escalar cualquiera. Entonces, la primera variación de  $E(u)$  está dada por:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ E_1(u + \varepsilon\varphi) + \frac{\lambda}{2} E_2(u + \varepsilon\varphi) \right\} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0, \quad (6.5)$$

con  $E_1(u)$  y  $E_2(u)$  definidas como la primera y segunda integral de (6.4) respectivamente. Para  $E_1(u)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} E_1(u + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\varphi)| dx dy \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{\nabla(u + \varepsilon\varphi)}{|\nabla(u + \varepsilon\varphi)|} \cdot \nabla\varphi dx dy \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla\varphi dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \left( \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \varphi dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \boldsymbol{\nu} ds \end{aligned} \quad (6.6)$$

y de la segunda integral se obtiene la condición de frontera

$$\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \partial\Omega. \quad (6.7)$$

Para  $E_2(u)$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} E_2(u + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} (u + \varepsilon\varphi - u^0)^2 dx dy \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \int_{\Omega} 2(u - u^0)\varphi dx dy. \quad (6.8)$$

Finalmente, juntando ambos resultados se tiene que la ecuación de Euler-Lagrange a resolver es

$$-\nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} + \lambda(u - u^0) = 0 \text{ en } \Omega, \quad (6.9)$$

con condiciones de frontera homogéneas tipo Neumann  $\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$  sobre  $\partial\Omega$  y con el vector normal unitario  $\boldsymbol{\nu}$ , tal y como fue definido con anterioridad.

## 7. Solución numérica

Esta sección describe el proceso detallado para obtener la solución numérica de la ecuación diferencial obtenida en (6.9). Para llevar a cabo la discretización, se hace uso de la técnica de diferencias finitas. Para esto, el dominio continuo se define como  $\Omega = [0, m] \times [0, n]$ , y se usa el vector  $(h_x, h_y)$  para representar el tamaño de las celdas en las direcciones  $x$  y  $y$  sobre la rejilla o malla  $G_h$  definida como

$$G_h = \{(x, y) : x = x_i = ih_x, y = y_j = jh_y; i, j \in \mathbb{Z}\}. \quad (7.1)$$

Dado que en una imagen digital todos los pixeles son del mismo tamaño, se tiene que  $h \equiv h_x = h_y$ . También se define la malla discreta como  $\Omega_h = \Omega \cap G_h$  y  $u_h = u_h(x, y) = u_h(x_i, y_j) = u_h(ih_x, jh_y)$  como la versión discreta de la función  $u$  definida en  $\Omega_h$ . Las derivadas con respecto a alguna variable  $\psi$  se escribirán como  $(\cdot)_{\psi}$ .

Si se define  $\mathbf{V} = (V^1, V^2) \equiv \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ , para obtener la aproximación de  $\nabla \cdot \mathbf{V} = (V^1)_x + (V^2)_y$  en algún pixel  $(i, j)$ , se usan diferencias centrales entre pixeles fantasma localizados en el punto intermedio entre dos pixeles reales. Esto es,

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_{i,j} = \frac{(V^1_{i+\frac{1}{2},j} - V^1_{i-\frac{1}{2},j})}{h} + \frac{(V^2_{i,j+\frac{1}{2}} - V^2_{i,j-\frac{1}{2}})}{h}. \quad (7.2)$$

Para obtener aproximaciones en los puntos intermedios se procede de la siguiente forma. Se consideran primero  $V^1_{i+\frac{1}{2},j}$  y  $V^1_{i-\frac{1}{2},j}$ :

$$\begin{aligned} V^1_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{(u_x)_{i+\frac{1}{2},j}}{|\nabla u|_{i+\frac{1}{2},j}}, & V^1_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{(u_x)_{i-\frac{1}{2},j}}{|\nabla u|_{i-\frac{1}{2},j}} \\ (u_x)_{i+\frac{1}{2},j} &= (u_{i+1,j} - u_{i,j})/h, & (u_x)_{i-\frac{1}{2},j} &= (u_{i,j} - u_{i-1,j})/h, \\ |\nabla u|_{i+\frac{1}{2},j} &= \sqrt{((u_x)_{i+\frac{1}{2},j})^2 + ((u_y)_{i,j+\frac{1}{2}})^2 + \beta}, \\ |\nabla u|_{i-\frac{1}{2},j} &= \sqrt{((u_x)_{i-\frac{1}{2},j})^2 + ((u_y)_{i,j-\frac{1}{2}})^2 + \beta} \end{aligned}$$

Aquí  $\beta$  es una constante positiva muy pequeña usada para evitar la división por cero. De forma similar, se obtienen las aproximaciones para  $V^2_{i,j+\frac{1}{2}}$  y  $V^2_{i,j-\frac{1}{2}}$ .

Las condiciones de frontera homogéneas tipo Neumann en  $\partial\Omega$  son tratadas de la siguiente forma:

$$u_{i,0} = u_{i,1}, u_{i,n+1} = u_{i,n}, u_{0,j} = u_{1,j}, u_{m+1,j} = u_{m,j}. \quad (7.3)$$

Una vez que se tiene la ecuación diferencial discretizada, es necesario implementar algún algoritmo iterativo para obtener la solución numérica de ésta. Quizás el algoritmo de este tipo más fácil de implementar,

aunque por mucho ni el mejor ni el de más rápida convergencia, es el método iterativo explícito de Euler también conocido como descenso de gradiente o método de marcha en el tiempo. En este método, la ecuación diferencial se convierte en una ecuación de tipo parabólico y se busca la solución de reposo de esta ecuación. Esto es, se busca la solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{V} + \lambda(u^0 - u), \quad (7.4)$$

con condición inicial  $u(x, y, 0) = u^0(x, y)$ . Esto lleva al método iterativo

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta t \{ \nabla \cdot \mathbf{V}_{i,j}^k + \lambda(u^0 - u_{i,j}^k) \}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.5)$$

En este método el problema suele estar en el valor del paso de tiempo  $\Delta t$ , el cual debe ser seleccionado por debajo de un valor máximo que asegure la estabilidad de la solución numérica. En el caso de (7.5),  $\Delta t$  debe obedecer la siguiente restricción:

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq c|\Delta u|, \quad (7.6)$$

donde  $c \sim O\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \beta}\right)$ , el cual tiende a cero en regiones de la imagen de brillo uniforme y para  $\beta \rightarrow 0$ .

A continuación se presenta en el Algoritmo 1 la implementación completa del método de descenso de gradiente para el modelo de variación total.

**entrada:** imagen ruidosa  $u^0$  de tamaño  $M \times N$ , tolerancia de paro  $TOL$ , parámetros  $\lambda, \beta, dt$   
**salida :** imagen  $u$  del mismo tamaño

$h=1/M$

**mientras**  $residuo \leq TOL$  **hacer**

$norma_{L2} = 0$

**Para**  $i \leftarrow 2$  **hasta**  $M$  **hacer**

**Para**  $j \leftarrow 2$  **hasta**  $N$  **hacer**

$f_i = (u(i+1, j) - u(i, j))/h$

$b_i = (u(i, j) - u(i-1, j))/h$

$f_j = (u(i, j+1) - u(i, j))/h$

$b_j = (u(i, j) - u(i, j-1))/h$

$f_{ja} = (u(i-1, j+1) - u(i-1, j))/h$

$f_{ia} = (u(i+1, j-1) - u(i, j-1))/h$

$c_1 = 1/\sqrt{f_i^2 + f_j^2 + \beta}$

$c_2 = 1/\sqrt{b_i^2 + f_{ja}^2 + \beta}$

$c_3 = 1/\sqrt{f_i^2 + f_j^2 + \beta}$

$c_4 = 1/\sqrt{f_{ia}^2 + b_j^2 + \beta}$

$div = f_i \times c_1 - b_i \times c_2 + f_j \times c_3 - b_j \times c_4$

$residuo = -div + \lambda \times (u(i, j) - u^0(i, j))$

$u_{nueva}(i, j) = u(i, j) - dt \times residuo$

$norma_{L2} = norma_{L2} + residuo^2$

**fin**

**fin**

$u = u_{nueva}$

**fin**

**Algoritmo 1:** Algoritmo del descenso de gradiente en la solución de la ecuación diferencial del modelo de variación total.

Existen otros métodos iterativos más eficientes y rápidos que el método explícito de Euler. Por ejemplo, el algoritmo de punto fijo de Vogel y Oman [28] y el método explícito acelerado de Marquina *et al* [18] son

dos ejemplos de algoritmos fáciles de implementar para esta ecuación. En este manuscrito se tomó la decisión de ilustrar el método explícito de Euler por su simpleza y porque continua siendo el más popular entre los autores de artículos científicos del área de procesamiento de imágenes que no son especialistas en métodos numéricos.



Figura 5: (a) Imagen ruidosa. (b) Imagen restaurada.

### 7.1. Ventajas y desventajas del modelo TV

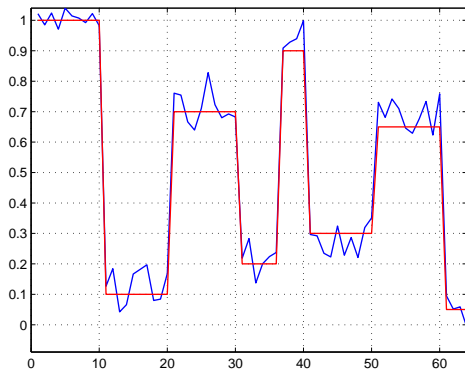
Las principales virtudes del modelo TV son: la excelente recuperación de bordes en la imagen, la unicidad de la solución y la buena restauración de regiones de brillo constante en la imagen. En la Figura 5(a) se muestra una imagen a color altamente contaminada por ruido aditivo Gaussiano, y en la Figura 5(b), la imagen recuperada después de aplicar el filtro de variación total. Como se puede observar el ruido fue removido y los bordes están bien definidos.

Sin embargo, el principal problema del modelo TV es que transforma funciones suaves o suaves a pedazos en funciones constantes a pedazos, fenómeno que es conocido como efecto de escalera. Este efecto, ocasiona que las imágenes procesadas no se vean naturales, y por el contrario, un poco empastadas, como se le conoce de forma coloquial. En la Figura 6 se ilustra este efecto sobre una señal uni-dimensional. Aunque algún esfuerzo se ha realizado para reducir el efecto escalera en modelos de segundo orden como el modelo TV (ver por ejemplo [18, 24, 9] y referencias ahí mencionadas), a través de métodos numéricos, parte de la investigación en esta área se ha redirigido hacia el uso de modelos de más alto orden [29, 17, 16, 30, 30] para evitar este problema. Ejemplos de este tipo de trabajos se encuentran en [29, 17, 16, 30, 30].

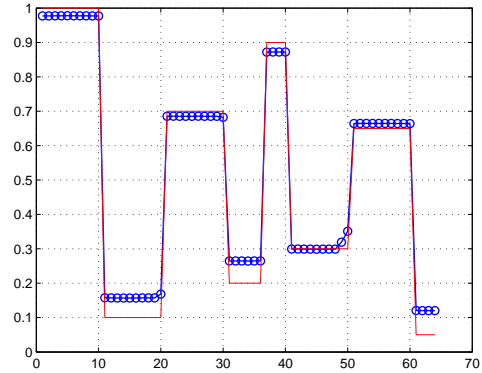
Sin embargo, modelos de alto orden involucran tener que resolver numéricamente PDEs de más alto orden también, lo cual normalmente es mucho más difícil que resolver PDEs de bajo orden. Esta dificultad, de alguna forma, ha impedido que estos nuevos modelos se vuelvan populares y de uso común. También en este sentido se han logrado avances haciendo uso de métodos numéricos más complejos como multigrad [3, 4].

## 8. Conclusiones

En este artículo se han proporcionado las herramientas matemáticas fundamentales para la formulación de problemas de procesamiento de imágenes desde el punto de vista variacional. A través del método de variación total para eliminación de ruido en imágenes, se han ejemplificado el uso, virtudes y defectos de esta técnica para resolver dicho problema. Los métodos variacionales, los cuales hacen uso de entidades geométricas como gradientes, curvaturas y área por mencionar algunos, permiten que toda la teoría del



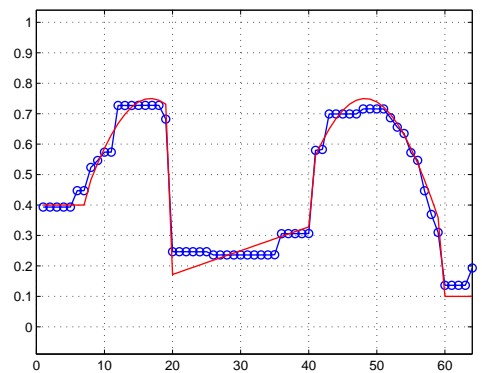
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6: (a) Imagen original (en rojo) e imagen ruidosa (en azul) en una sola dimensión. Note que la señal original es constante a pedazos. (b) Imagen original e imagen recuperada con el método TV, se observa una muy buena reconstrucción. (c) Imagen original e imagen ruidosa; esta vez, la imagen es suave a pedazos. (d) Imagen original e imagen recuperada con el método TV. Se observa cómo la imagen suave a pedazos fue transformada en constante a pedazos.

cálculo y la geometría diferencial estén a disposición para el análisis riguroso del problema y su formulación.

## Referencias

- [1] T. Bonesky, *Morozov's discrepancy principle and Tikhonov-type functionals*, Inverse Problems **25**, no. 1, (2009).
- [2] R. S. Borden, *A Course in Advanced Calculus*, Elsevier Science Publishing 52 Vanderbilt Av. New York, USA, 1983.
- [3] C. Brito-Loeza and K. Chen, *Multigrid algorithm for high-order denoising*, SIAM Journal on Imaging Sciences **3**, no. 3, (2010), 363-389.
- [4] C. Brito-Loeza and K. Chen, *On High-order denoising models for vector-valued images*, IEEE Transactions on Image Processing **19**, no. 6, (2010), 1518-1527.
- [5] R. Aurélie Bugeau, Marcelo Bertalmio, Vicent Caselles, and Guillermo Sapiro, *A comprehensive framework for image inpainting*, IEEE Transactions on Image Processing, **19**, no.10, (2010), 2634-2645.
- [6] A. Chambolle and P.-L. Lions, *Image recovery via total variation minimization and related problems*, Numerische Mathematik **76**, (1997), 167-188.
- [7] T. F. Chan and K. Chen, *An optimization-based multilevel algorithm for total variation image denoising*, SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation **5**, no. 2 (2006), 615-645.
- [8] T. F. Chan and J. Shen. *Image Processing and Analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods*, SIAM Philadelphia, 2005.
- [9] Y. Chen and S. Levine and M. Rao, *Variable Exponent, Linear Growth Functionals in Image Restoration*, SIAM Journal on Applied Mathematics **66**, no. 4, (2006), 1383-1406.
- [10] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Monographs in Mathematics, Birkhauser, 1984.
- [11] Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods, *Digital Image Processing (3rd Edition)*, Prentice Hall; August 31, 2007.
- [12] Goshtasby, A. Ardeshir. *Image Registration, Principles, Tools and Methods*, Series: Advances in Computer Vision and Pattern Recognition, Springer-Verlag, London limited, 2012.
- [13] M. Hanke, *Limitations of the L-curve method in ill-posed problems*, BIT **36**, no. 2, (1996), 287-301.
- [14] P.C. Hansen, *Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve*, SIAM Review **34**, no. 4, (1992), 561-580.
- [15] P.C. Hansen and D.P. O'Leary, *The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems*, SIAM Journal on Scientific Computing **14**, no. 6, (1993), 1487-1503.
- [16] M. Lysaker and A. Lundervold and X.-C. Tai, *Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time*, IEEE Transactions on Image Processing **12**, no. 12, (2003), 1579-1590.
- [17] M. Lysaker and S. Osher and X.-C. Tai, *Noise removal using smoothed normals and surface fitting*, IEEE Transactions on Image Processing **13**, no. 10, (2004), 1345-1357.
- [18] A. Marquina and S. Osher, *Explicit algorithms for a new time dependent model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise removal*, SIAM Journal on Scientific Computing **22**, no. 2, (2000), 387-405.



- [19] Vladimir Maz'ya. Sobolev spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations, Springer, second augmented edition, 2011.
- [20] Peyman Milanfar. Super-Resolution Imaging, Series: Digital Imaging and Computer Vision, CRC Press, September 28, 2010.
- [21] F. Riesz and B. SZ.-Nagy. Functional Analysis, Dover Publications Inc., Reprinted edition, 1991.
- [22] L. I. Rudin and S. Osher and E. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D **60**, no. 1-4, (1992), 259-268.
- [23] W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 3rd edition, 1976.
- [24] J. Savage and K. Chen, *On multigrids for solving a class of improved total variation based staircasing reduction models*, Image Processing Based On Partial Differential Equations, eds. X.-C. Tai, K.-A. Lie, T. F. Chan and S. Osher, Springer Berlin Heidelberg **82**, (2006), 69-94.
- [25] O. Scherzer, *The use of Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems*, Computing **51**, no. 1, (1993), 45-60.
- [26] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems, Wiston and Sons Washington, D.C., 1977.
- [27] K. S. Thyagarajan. Still Image and Video Compression with MATLAB, Wiley, 2010.
- [28] C. R. Vogel. Computational Methods for Inverse Problems. SIAM, 1st edition Philadelphia, PA, USA, 2002.
- [29] Y.-L. You and M. Kaveh, *Fourth-order partial differential equations for noise removal*, SIAM Journal on Scientific Computing **10**, no. 9, (2000), 1723-1730.
- [30] W. Zhu and T. F. Chan, *Image denoising using mean curvature of image surface*, SIAM Journal on Imaging Sciences **5**, no. 1, (2012), 1-32.