

Estabilidad Local de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Retardo y Aplicaciones

Ángel Gabriel Estrella–González¹, Gerardo Emilio García–Almeida², Eric José Avila–Vales³

^{1,2,3}Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán.

¹aestrel@uady.mx , ²galmeida@uady.mx, ³avila@uady.mx

Abstract

In this paper we present the methodology followed to determine the stability of equilibria for systems of differential equations comparing the following three cases: ordinary, with discrete delays, and with distributed delays. Examples from recent research papers are given to illustrate the procedures used to accomplish that task.

Resumen

En este artículo se presenta la metodología empleada para determinar la estabilidad de puntos de equilibrio de sistemas de ecuaciones diferenciales, considerando los siguientes tres casos: Ordinarias, con retardos discretos, y con retardos distribuidos. Se presentan ejemplos tomados de artículos de investigación recientes para ilustrar la aplicación del proceso seguido para tal efecto.

1. Introducción

Este artículo es el segundo de una serie de tres en la que se presentan los métodos principales para el análisis de la estabilidad local de ecuaciones diferenciales incluyendo ecuaciones con retardo discreto y distribuido así como ecuaciones ordinarias y de reacción y difusión. Para ilustrar estos métodos se presentan ejemplos tomados de artículos de investigación recientes. En esta segunda parte hablaremos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo. La estructura general consistirá en presentar primero el tipo de sistema de ecuaciones diferenciales que se estudiará, después se mostrará como se obtienen la linealización y la ecuación característica y finalmente se presentarán ejemplos tomados de diversas áreas de aplicación. El objetivo principal de esta serie es el de enlistar los métodos y las referencias en los que éstos se desarrollan

2. Notación

A lo largo de este artículo, como se hizo en el anterior de esta serie [3], emplearemos la notación siguiente:

2010 *Mathematics Subject Classification.* 34K05, 34K20, 34K28, 34K60, 37–01

Keywords and phrases: Differential equations, Discrete Delay, Distributed Delay, Stability, Characteristic Equation.

$$\text{Retardo discreto : } u_T = u_T(t) = u(t - T), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Retardo continuo o distribuido : } D[u] &= D[u](t) = D[u; K](t) \\ &= \int K(s)u(t-s)ds = \int K(s)u_s(t)ds, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{La derivada de } f \text{ con respecto} \\ \text{a la } i\text{-ésima variable : } D_i f. \end{aligned} \quad (2.3)$$

En la sección 3 estudiaremos el caso sin retardo, en la 4 el caso con uno o más retardos discretos y en la 5 se estudiará el caso con uno o más retardos distribuidos.

3. Sistemas de ecuaciones ordinarias

Supongamos que x, y satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde f_i es lo suficientemente diferenciable para que la solución exista.

Similarmente al caso de una ecuación, un punto de equilibrio o solución constante (x_0, y_0) satisface

$$f_1(x_0, y_0) = 0, \quad (3.2)$$

$$f_2(x_0, y_0) = 0. \quad (3.3)$$

3.1. Linealización

Una solución cercana al punto de equilibrio de la forma $(x, y) = (x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v)$ cumple

$$\dot{x} = \epsilon \dot{u} = f_1(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v), \quad (3.4)$$

$$\dot{y} = \epsilon \dot{v} = f_2(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v). \quad (3.5)$$

Usando aproximaciones de Taylor en dos variables obtenemos para $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v) &\approx f_i(x_0, y_0) + D_1 f_i(x_0, y_0) \cdot \epsilon u + D_2 f_i(x_0, y_0) \cdot \epsilon v \\ &= \epsilon [D_1 f_i(x_0, y_0) \cdot u + D_2 f_i(x_0, y_0) \cdot v], \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $D_j f_i$ se define (2.3). Finalmente, combinando (3.4) y (3.5) con (3.6) obtenemos el sistema

$$\dot{u} = D_1 f_1(x_0, y_0) \cdot u + D_2 f_1(x_0, y_0) \cdot v, \quad (3.7)$$

$$\dot{v} = D_1 f_2(x_0, y_0) \cdot u + D_2 f_2(x_0, y_0) \cdot v, \quad (3.8)$$

el cual podemos escribir usando notación matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

En la expresión anterior las derivadas parciales se evalúan en el punto de equilibrio (x_0, y_0) . La ecuación (3.10) se conoce como la linealización de (3.1) cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0) .

3.2. Ecuación característica

Para encontrar la ecuación característica, supongamos $(u, v) = (C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\lambda t})$, sustituyendo en (3.9) obtenemos

$$\lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} J \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

de donde

$$\lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

o equivalentemente

$$[\lambda I - J] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0,$$

y este sistema tienen una solución no trivial si y solo si

$$\det [\lambda I - J] = 0.$$

donde J está definida por (3.10). Esta última ecuación es conocida como la ecuación característica de (3.1). Ya que estamos trabajando en el caso de dos ecuaciones y obtenemos matrices de 2×2 , podemos calcular el determinante que aparece en la ecuación característica de (3.1) para escribirla como

$$\lambda^2 - T\lambda + \delta = 0 \tag{3.11}$$

donde T y δ son la traza y el determinante de la matriz J respectivamente. Podemos aplicar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación y obtener el siguiente resultado

Proposición 3.1 ([11], p.25) Sean $\delta = \det(J)$ y $T = \text{Tr}(J)$,

- Si $\delta < 0$ entonces (3.9) tiene un punto silla en el origen.
- Si $\delta > 0$ y $T^2 - 4\delta \geq 0$ entonces (3.9) tiene un nodo en el origen; es estable si $T < 0$ y es inestable si $T > 0$.
- Si $\delta > 0$, $T^2 - 4\delta < 0$ y $T \neq 0$, entonces (3.9) tiene un foco en el origen; es estable si $T < 0$ y es inestable si $T > 0$.
- Si $\delta > 0$ y $T = 0$ entonces (3.9) tiene un centro en el origen.

Para una descripción del plano traza-determinante ver [11] p.26.

3.3. Ejemplo 1: Estabilidad de un sistema depredador-presa dependiente del cociente.

En 1998, Beretta y Kuang [8] analizaron las propiedades cualitativas globales de un sistema de la forma

$$\begin{aligned} x' &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{cxy}{my+x}, \\ y' &= y \left(-d + \frac{fx}{my+x}\right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$x(0) > 0, \quad y(0) > 0,$$

este es un modelo depredador-presa del tipo dependiente del cociente con respuesta funcional de la forma Michaelis-Menten, donde y es el número de depredadores y x es el número de presas, $a > 0$ es la razón de crecimiento intrínseco de la presa, $K > 0$ es la capacidad de carga del sistema, $c > 0$ es la razón de captura, $m > 0$ es la constante de saturación de captura media, $f > 0$ es la razón de conversión y $d > 0$ es la razón

de muerte del depredador. Se dice que un modelo depredador-presa es dependiente del cociente si es de la forma:

$$\begin{aligned}x' &= xf(x) - yp\left(\frac{x}{y}\right) \\y' &= cyq\left(\frac{x}{y}\right) - dy,\end{aligned}$$

donde las respuestas funcionales p y q dependen del cociente $\frac{x}{y}$. Una respuesta funcional p es de la forma Michaelis-Menten o Holling de tipo II cuando $p(x) = \frac{cx}{my+x}$, donde c y m son constantes y puede expresarse como $p\left(\frac{x}{y}\right)$ si dividimos numerador y denominador entre y . Este tipo de funciones de la forma Michaelis-Menten también aparecen en la cinética de enzimas.

Tomemos

$$f_1(x, y) \equiv ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{cxy}{my+x}, \quad (3.13)$$

$$f_2(x, y) \equiv y\left(-d + \frac{fx}{my+x}\right), \quad (3.14)$$

y definamos $f_1(0, 0) = 0$, $f_2(0, 0) = 0$, de esta forma f_1 y f_2 son continuas en el cono positivo $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Nos centraremos en el punto de equilibrio positivo $E^* = (x_0, y_0)$, con

$$x_0 = K\left(\frac{cd - f(c - ma)}{amf}\right), \quad (3.15)$$

$$y_0 = \left(\frac{f-d}{dm}\right)x_0, \quad (3.16)$$

el cual existe si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones

i) $d < f < dc/(c - ma)$, cuando $c > ma$,

ii) $f > d$, cuando $c \leq ma$.

Siguiendo lo presentado en las secciones anteriores, la linealización de (3.12) está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

donde, de acuerdo a (3.10), la matriz J está definida por

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{bmatrix} D_1 f_1(x_0, y_0) & D_2 f_1(x_0, y_0) \\ D_1 f_2(x_0, y_0) & D_2 f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a - \frac{2ax_0}{K} - \frac{cm y_0^2}{(m y_0 + x_0)^2} & \frac{-cx_0^2}{(m y_0 + x_0)^2} \\ \frac{f m y_0^2}{(m y_0 + x_0)^2} & -d + \frac{f x_0^2}{(m y_0 + x_0)^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{f^2 c - am f^2 - cd^2}{f^2 m} & \frac{-d^2 c}{f^2} \\ \frac{(f - d)^2}{mf} & \frac{(d - f)d}{f} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

y su determinante es $\delta = am d^2 y_0 / (K f)$, por lo tanto es positivo y podemos usar (b,c) de la Proposición 3.1 para concluir que este punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable si la traza de J es negativa, ya que

$$Tr(J) = -a + \left(1 - \frac{d}{f}\right) \left[\frac{c}{m} \left(\frac{d}{f} + 1\right) - d\right]$$

entonces, una posibilidad para garantizar esto es tomar f cercano a d .

Notemos que $Tr(J)$ no depende de K , esto es, la estabilidad no depende de la capacidad del sistema K .

Se observa que hay seis parámetros en (3.12). Si tomamos los siguientes cambios en dicho sistema

$$t \rightarrow at, \quad x \rightarrow x/K, \quad y \rightarrow \frac{m}{K}y,$$

entonces el sistema toma la forma más simple siguiente

$$\begin{aligned}
 x' &= x(1 - x) - \frac{sxy}{x + y} \\
 y' &= \delta y \left[\frac{x}{x + y} - r \right]
 \end{aligned}$$

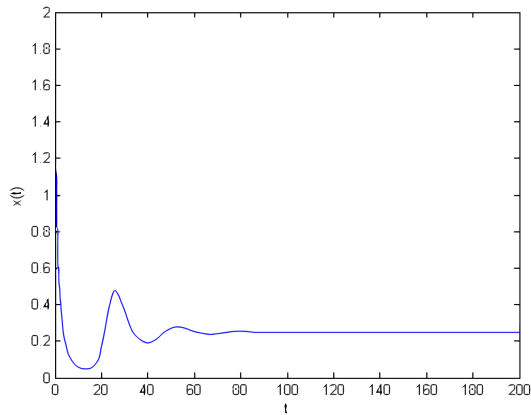
con los parámetros

$$s = \frac{c}{ma} \quad \delta = \frac{f}{a} \quad r = \frac{d}{f}$$

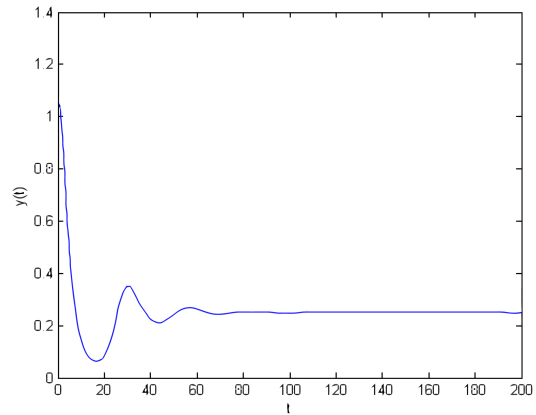
A continuación se muestran las gráficas de algunas soluciones de este sistema. Se muestran primero las dos variables dependientes en función del tiempo y luego el plano fase. Definiendo los valores de los parámetros como $a = 2$, $K = 1$, $c = 3$, $m = 1$, $d = 1$ y $f = 2$ se satisface (i) para la existencia de E^* . En este caso $s = 1,5$, $\delta = 1$ y $r = 0,5$, con $x(0) = 2$, $y(0) = 1$. Con lo anterior se satisface

Condición	Resultado
$0 < r < 1$, $1 < s < 1/(1 - r)$	E^* es localmente estable

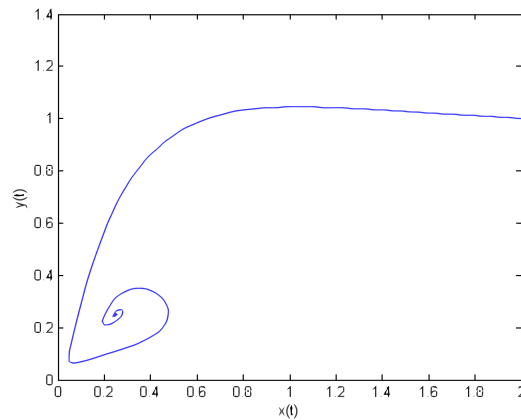
Y el equilibrio es $E^* = (0,25, 0,25)$. Las gráficas para este conjunto de valores de los parámetros son:



(a) Dinámica del depredador



(b) Dinámica de la presa

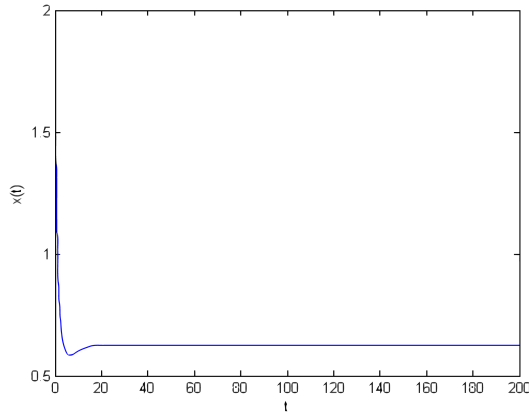


(c) Plano fase

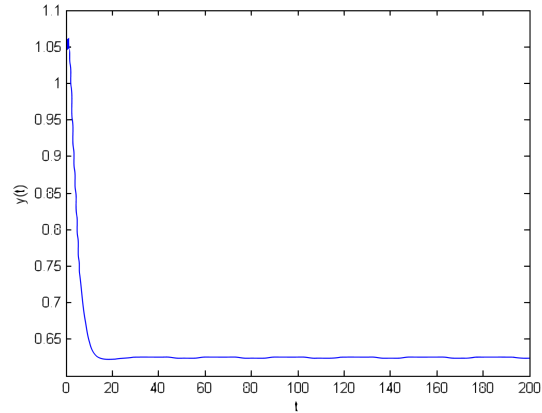
Tomando ahora como valores de los parámetros $a = 2$, $K = 1$, $c = 3$, $m = 2$, $d = 1$ y $f = 2$ se satisface (ii) para la existencia de E^* . En este caso $s = 0,75$, $\delta = 1$ y $r = 0,5$, con $x(0) = 2$, $y(0) = 1$. Con lo anterior se satisface

Condición	Resultado
$0 < r < 1$, $0 < s \leq 1$	E^* es globalmente estable

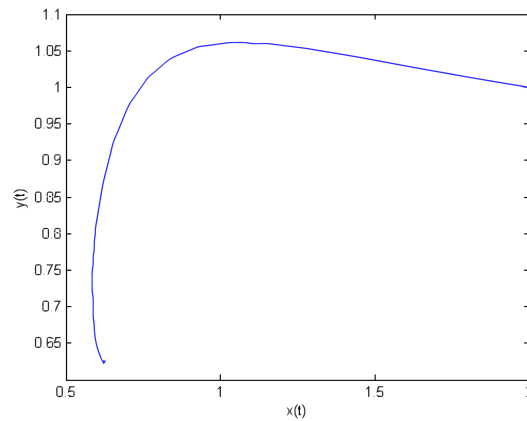
Y el equilibrio es $E^* = (0,625, 0,3125)$. Las gráficas para este conjunto de valores de los parámetros son:



(d) Dinámica del depredador



(e) Dinámica de la presa



(f) Plano fase

Diferentes aspectos del comportamiento de este sistema como lo son la permanencia de las soluciones en el primer cuadrante, la estabilidad local y global de los puntos de equilibrio, acotamiento de las soluciones, etc., se analizan en [8] (Modelo original sin retardo) y en [9] (versiones con retardo determinístico y estocástico de este modelo).

3.4. Ejemplo 2: Un modelo de pesca con explotación de recursos (o cosecha) del tipo depredador-presa

La modelación bioeconómica de la explotación de recursos biológicos como la pesca y los bosques ha atraído el interés de muchos investigadores en los últimos años como puede verse en [5], [6], [12] y en las referencias que incluyen.

El siguiente ejemplo es un modelo del tipo depredador-presa analizado por Purohit y Chaudhuri en [12], en el cual tanto la presa como el depredador siguen la ley de Gompertz como se presenta en el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \ln\left(\frac{K}{x}\right) - \alpha y(x - K_0) - q_1 E x, \\ \dot{y} &= sy \ln\left(\frac{L}{y}\right) + m\alpha y(x - K_0) - q_2 E y. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En este modelo y es el número de depredadores y x es el número de presas, r , s representan los potenciales bióticos, K , L las capacidades de carga de cada una de las especies, K_0 es el número de presas que encuentran

refugio, α es el coeficiente de depredación, m representa el factor de conversión de biomasa consumida a energía reproductiva del depredador, E denota el esfuerzo de cosecha y q_1, q_2 son los coeficientes de atrapabilidad al cosechar las especies. Aquí $x \leq K_0$ significa que todas las presas encuentran refugio lo cual podemos suponer que sucede cuando el número de presas es muy pequeño. También suponemos que el número de presas que encuentran refugio es constante, lo cual no siempre sucede pero nos servirá como una primera aproximación en nuestro modelo.

Un punto de equilibrio positivo cumple $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$ donde

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= rx \ln \left(\frac{K}{x} \right) - \alpha y(x - K_0) - q_1 E x, \\ f_2(x, y) &= sy \ln \left(\frac{L}{y} \right) + m\alpha y(x - K_0) - q_2 E y. \end{aligned}$$

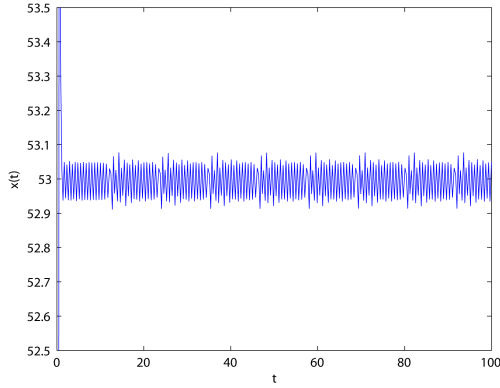
La matriz de coeficientes de la linealización cerca de este punto de equilibrio, definida por (3.10), está dada por

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} D_1 f_1(x_0, y_0) & D_2 f_1(x_0, y_0) \\ D_1 f_2(x_0, y_0) & D_2 f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -r + r \ln \left(\frac{K}{x_0} \right) - \alpha y_0 - q_1 E & -\alpha(x_0 - K_0) \\ m\alpha y_0 & -s + s \ln \left(\frac{L}{y_0} \right) + m\alpha(x_0 - K_0) - q_2 E \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -r - \frac{\alpha K_0 y_0}{x_0} & -\alpha(x_0 - K_0) \\ m\alpha y_0 & -s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

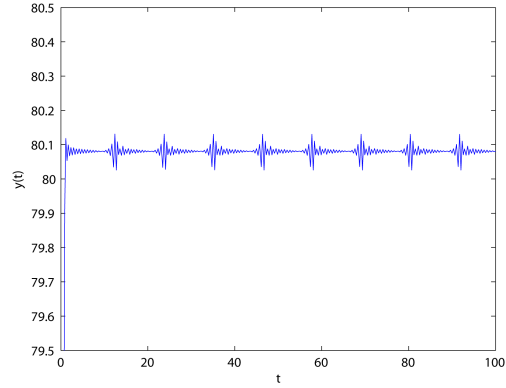
En consecuencia, la ecuación característica está dada por la ecuación (3.11) donde

$$\begin{aligned} T &= \text{Tr}(J) = -r - s - \frac{\alpha K_0 y_0}{x_0}, \\ \delta &= \det(J) = \alpha^2 (x_0 - K_0) m y_0 + \frac{\alpha s K_0 y_0}{x_0} + sr. \end{aligned}$$

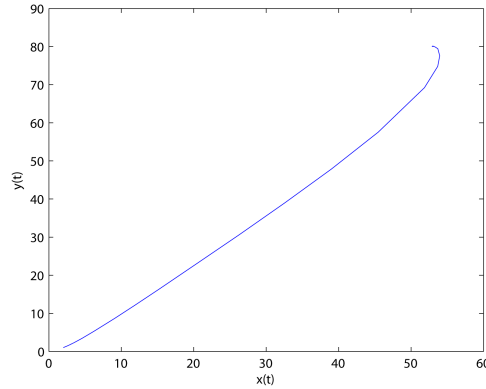
Notemos que $T < 0$ y $\delta > 0$, además para la ecuación (3.11), la suma de sus raíces es T y el producto es igual a δ , por lo tanto, las raíces son ambas reales negativas o complejas conjugadas con parte real negativa, esto es, el punto (x_0, y_0) es asintóticamente estable. Definamos los valores de los parámetros como $r = 5,5$, $s = 8$, $K = 100$, $L = 80$, $K_0 = 20$, $q_1 = 0,005$, $q_2 = 0,007$, $\alpha = 0,07$, $E = 0,5$ y $m = 0,005$ con $x(0) = 4$, $y(0) = 3$. En este caso el equilibrio es $(x^*, y^*) = (52,66, 80,79)$ y las gráficas de la solución del sistema y el plano fase correspondiente son



(g) Dinámica de la presa



(h) Dinámica del predador



(i) Plano fase del sistema

4. Sistemas de ecuaciones ordinarias con retardo discreto

Los lectores que no estén familiarizados con el concepto de retardo pueden consultar [3]. Consideremos un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y, x_T, y_T) \\ \dot{y} &= f_2(x, y, x_T, y_T)\end{aligned}\quad (4.1)$$

donde f_i , $i = 1, 2$ es una función suficientemente diferenciable para que exista la solución del sistema. Similarmente al caso de una ecuación, un punto de equilibrio (x_0, y_0) satisface

$$f_1(x_0, y_0, x_0, y_0) = 0 \quad (4.2)$$

$$f_2(x_0, y_0, x_0, y_0) = 0, \quad (4.3)$$

es decir, para encontrar los puntos de equilibrio es necesario resolver el sistema algebraico anterior.

4.1. Linealización

Una solución cercana al punto de equilibrio de la forma $(x, y) = (x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v)$ cumple

$$\dot{x} = \epsilon \dot{u} = f_1(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v, x_0 + \epsilon u_T, y_0 + \epsilon v_T), \quad (4.4)$$

$$\dot{y} = \epsilon \dot{v} = f_2(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v, x_0 + \epsilon u_T, y_0 + \epsilon v_T). \quad (4.5)$$

Por medio de aproximaciones de Taylor de funciones de cuatro variables tenemos

$$\begin{aligned}
& f_i(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v, x_0 + \epsilon u_T, y_0 + \epsilon v_T) \\
& \approx f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) + D_1 f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) \cdot \epsilon u + D_2 f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) \cdot \epsilon v \\
& + D_3 f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) \cdot \epsilon u_T + D_4 f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) \cdot \epsilon v_T \\
& = \epsilon [D_1 f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) \cdot u + D_2 f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) \cdot v \\
& + D_3 f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) \cdot u_T + D_4 f_i(x_0, y_0, x_0, y_0) \cdot v_T] \\
& = \epsilon [D_1 f_i \cdot u + D_2 f_i \cdot v + D_3 f_i \cdot u_T + D_4 f_i \cdot v_T],
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $D_j f_i$ es la derivada parcial de f_i con respecto a la j -ésima variable evaluada en el punto (x_0, y_0, x_0, y_0) . Aquí $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3, 4$. Finalmente, combinando (4.4, 4.5) con (4.6) obtenemos el sistema

$$\dot{u} = D_1 f_1 \cdot u + D_2 f_1 \cdot v + D_3 f_1 \cdot u_T + D_4 f_1 \cdot v_T, \tag{4.7}$$

$$\dot{v} = D_1 f_2 \cdot u + D_2 f_2 \cdot v + D_3 f_2 \cdot u_T + D_4 f_2 \cdot v_T. \tag{4.8}$$

Usando notación matricial, podemos escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + J_D \begin{bmatrix} u_T \\ v_T \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

$$J_D = \begin{bmatrix} D_3 f_1 & D_4 f_1 \\ D_3 f_2 & D_4 f_2 \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

donde las derivadas parciales se evalúan en los puntos adecuados mencionados antes. La ecuación (4.9) es la linealización de (4.1) cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0) .

4.2. Ecuación característica

Para encontrar la ecuación característica, supongamos $(u, v) = (C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\lambda t})$, al sustituir en (4.9) obtenemos

$$\lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} J \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{\lambda t} e^{-\lambda T} \cdot J_D \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$\lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{-\lambda T} \cdot J_D \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

o equivalentemente

$$[\lambda I - J - e^{-\lambda T} \cdot J_D] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0,$$

y este sistema tiene una solución no trivial si

$$\det [\lambda I - J - e^{-\lambda T} \cdot J_D] = 0,$$

donde J y J_D son las matrices definidas por (4.10, 4.11) Esta última ecuación es conocida como la ecuación característica de (4.1)

En este caso, ya que J y J_D son matrices de 2×2 , tenemos

$$\det [\lambda I - J - e^{-\lambda T} \cdot J_D] = \lambda^2 + p\lambda + r + (s\lambda + q)e^{-\lambda T} + we^{-2\lambda T},$$

donde

$$\begin{aligned} p &= -Tr(J), \\ r &= \det(J), \\ s &= -Tr(J_D), \\ q &= \det(J + J_D) - \det(J) - \det(J_D), \\ w &= \det(J_D), \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación característica la podemos escribir como

$$\lambda^2 + p\lambda + r + (s\lambda + q)e^{-\lambda\tau} + we^{-2\lambda\tau} = 0.$$

Similarmente al caso de una ecuación diferencial ordinaria con retardo discutido en [3] y [14], la estabilidad de un punto de equilibrio queda determinada si todas las raíces de la ecuación característica asociada al punto de equilibrio en cuestión tienen parte real negativa. El equilibrio es inestable si existe al menos una raíz con parte real positiva. La idea en que se basa un método de análisis de los puntos de equilibrio es determinar primero qué tipo de equilibrio se tiene cuando el retardo τ es igual a cero y luego determinar para qué valores del retardo τ algún par de raíces de la ecuación característica cruza el eje imaginario. Para determinar el sentido de estos cruces del eje imaginario, se analiza cuál es el signo de la derivada de la parte real de λ con respecto a τ para los valores de τ en los cuales ocurren estos cruces. Dependiendo del sentido de estos cruces puede darse un cambio de estabilidad (Bifurcación de Hopf). Dada la simetría de la ecuación característica con respecto a la conjugación compleja, se tiene que las raíces de la misma vienen en pares conjugados. Para más detalles sobre esta metodología de análisis de los puntos de equilibrio, el lector puede consultar [7].

4.3. Ejemplo

A continuación mostramos un sistema de ecuaciones con retardo discreto presentado en [2, 13] que modela el crecimiento de un tumor canceroso tomando en cuenta al sistema inmune:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - xy, \quad (4.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(t - \tau)y(t - \tau) - \frac{1}{\alpha}y - \kappa x + \sigma, \quad (4.13)$$

en el cual las variables son adimensionales, siendo x la relacionada con la población de células cancerosas y y la relacionada con la población de células del sistema inmune (linfocitos). Los parámetros α , κ y σ vienen dados por las relaciones siguientes:

$$\alpha = \sqrt{\frac{a}{f}}, \quad \kappa = \frac{kb}{d\sqrt{af}} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{ub}{af},$$

donde a es la tasa intrínseca de crecimiento tumoral, f es el recíproco o inverso de la vida media de los linfocitos, k es la fracción de células tumorales que bloquean el flujo de linfocitos a la región ocupada por el tumor, b es la proporción de células cancerosas eliminadas por linfocitos activos por unidad de tiempo, d es la tasa de linfocitos T reclutados por la interacción de un linfocito activo con una célula cancerosa en el tumor, y u es el influjo constante de linfocitos activos por el sistema inmune en ausencia del tumor. Cabe también mencionar que el retardo τ está relacionado con el tiempo de proliferación y maduración de los linfocitos.

Los puntos de equilibrio de este sistema son $L_0 = (0, \alpha\sigma)$ y $L_1 = \left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\kappa}, \alpha\right)$.

La linealización alrededor de $L_0 = (0, \alpha\sigma)$ es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(1 - \sigma)x(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha\sigma x(t - \tau) - \kappa x(t) - \frac{1}{\alpha}y(t) \end{aligned}$$

El sistema linealizado alrededor de $L_1 = \left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\kappa}, \alpha\right)$ es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{1-\sigma}{\alpha-\kappa}y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha x(t-\tau) + \frac{1-\sigma}{\alpha-\kappa}y(t-\tau) - \kappa x(t) - \frac{1}{\alpha}y(t)\end{aligned}$$

Para encontrar la ecuación característica recordemos que

$$\det(\lambda I - J - e^{-\lambda\tau} \cdot J_D) = 0.$$

Simplificando tenemos:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha + y & x \\ \kappa - y_\tau e^{-\lambda\tau} & \lambda + \frac{1}{\alpha} - x_\tau e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

Sustituyendo L_0 en (4.14) obtenemos lo siguiente:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha + \alpha\sigma & 0 \\ \kappa - \alpha\sigma e^{-\lambda\tau} & \lambda + \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} = 0.$$

Simplificando la expresión anterior se llega a

$$(\lambda - \alpha + \alpha\sigma) \left(\lambda + \frac{1}{\alpha} \right) = 0.$$

Así podemos observar que la ecuación característica es un polinomio, como ocurre en el caso de los sistemas sin retardo. Por lo tanto, para L_0 se cumple que:

- Si $\sigma > 1$ entonces tenemos un nodo estable.
- Si $\sigma < 1$ entonces tenemos un punto silla inestable.

Ahora sustituyendo L_1 en (4.14) se obtiene lo siguiente:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{\sigma-1}{\alpha-\kappa} \\ \kappa - \alpha e^{-\lambda\tau} & \lambda + \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\kappa}\right) e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

Simplificando (4.15) llegamos a

$$\lambda^2 + \left(\frac{\sigma-1}{\alpha-\kappa} e^{-\lambda\tau} + \frac{1}{\alpha} \right) \lambda - \left((\alpha e^{-\lambda\tau} - \kappa) \left(\frac{\sigma-1}{\alpha-\kappa} \right) \right) = 0 \quad (4.16)$$

Introduciendo los siguientes parámetros:

$$A = \frac{\sigma-1}{\alpha-\kappa} \quad B = \frac{1}{\alpha} \quad C = \alpha \left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\kappa} \right) \quad D = \kappa \left(\frac{\sigma-1}{\alpha-\kappa} \right),$$

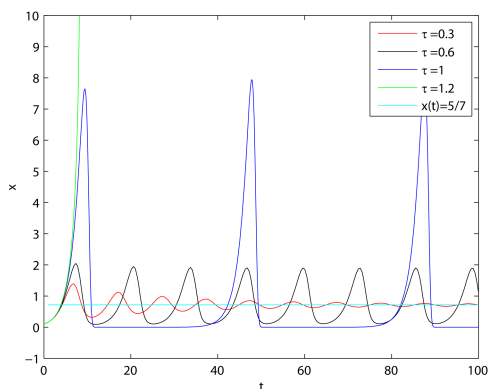
entonces la ecuación (4.16) se reduce a:

$$\lambda^2 + B\lambda + D + (A\lambda + C) e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (4.17)$$

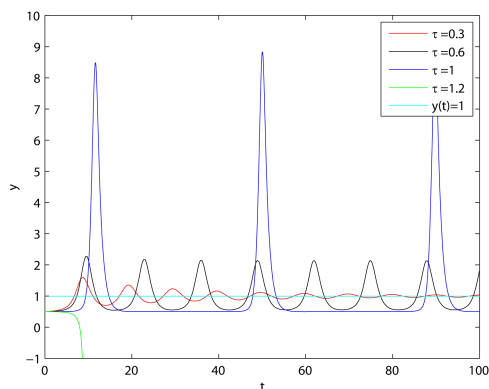
Considerando $D(\lambda, \tau)$, el lado izquierdo de la ecuación característica, como una función de λ y τ se tiene que $D(0, \tau) = 1 - \sigma < 0$ bajo la suposición de que $\sigma > 1$. Dado que $D(\lambda, \tau) \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$, se tiene entonces que para cada $\tau > 0$ existe alguna $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ tal que $D(\lambda, \tau) = 0$. De ahí se puede concluir que, como siempre existe una raíz positiva para cualquier valor positivo del retardo τ , el sistema con retardo sigue siendo inestable alrededor de L_1 . Nótese que en este caso el sistema sin retardo es inestable ya que $1 - \sigma$ es el producto de las dos raíces del polinomio característico. Para $\sigma < 1$ se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.1 (Espinosa, Riquelme [2]) *En el rango $\frac{\kappa}{\alpha} < \sigma < 1$ las soluciones alrededor de L_1 del sistema sin retardo son estables. Para el sistema con retardo, con σ en el rango anterior existe $\tau_i > 0$ tal que para cada $\tau \geq \tau_i$ las soluciones del sistema con retardo se hacen inestables alrededor de L_1 . Para $\sigma < \frac{\kappa}{\alpha} < 1$, no existe τ para la cual las soluciones alrededor de L_1 cambien su estabilidad.*

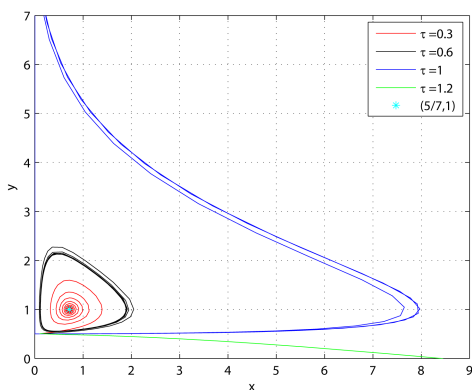
A continuación se grafican algunas soluciones del sistema anterior con $\sigma < 1$ y sus correspondientes planos fase para ilustrar lo establecido por el teorema anterior. Tomemos $\alpha = 1$, $\sigma = 0,5$ y $\kappa = 0,3$, con historias constantes $x_0 = 0,1$ y $y_0 = 0,5$, para retardos $\tau = 0,3, 0,6, 1, 1,2$. Con los valores anteriores caemos en el rango $\frac{\kappa}{\alpha} < \sigma < 1$, el equilibrio $L_1 = (5/7, 1)$ y obtenemos las gráficas siguientes



(j) Dinámica de células cancerosas

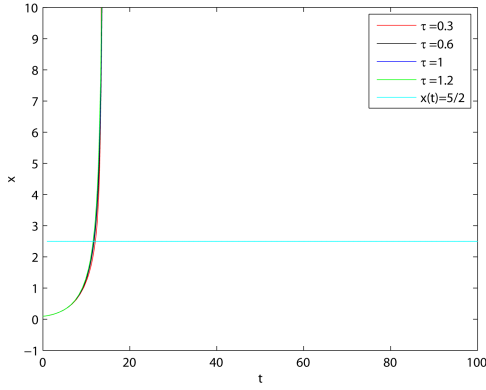


(k) Dinámica de linfocitos

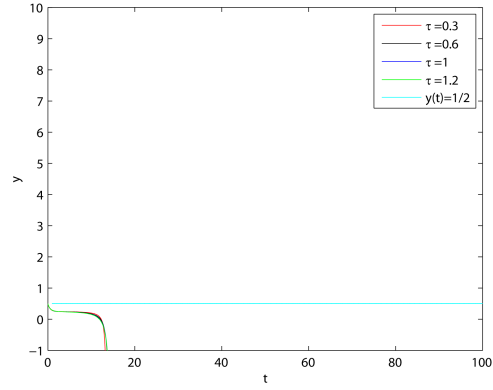


(l) Plano fase del sistema

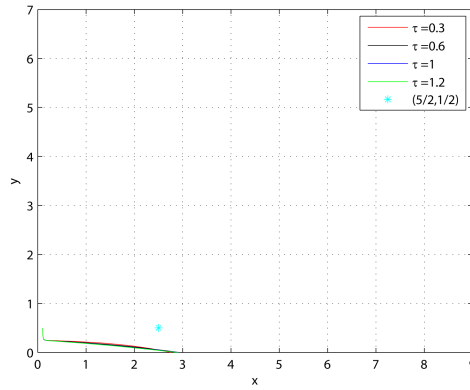
Hagamos ahora $\alpha = 0,5$, $\sigma = 0,5$ y $\kappa = 0,3$, con historias constantes $x_0 = 0,1$ y $y_0 = 0,5$, para retardos $\tau = 0,3, 0,6, 1, 1,2$. Con los valores anteriores se cae en el rango $\sigma < \frac{\kappa}{\alpha} < 1$, quedando inestable el equilibrio para cualquier τ . Las gráficas obtenidas son



(m) Dinámica de células cancerosas



(n) Dinámica de linfocitos



(ñ) Plano fase del sistema

4.4. Ejemplo

En [10] encontramos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} S'(t) &= \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{mX(t)S(t)}{a+S(t)} \\ X'(t) &= \frac{mX(t)S(t-\tau)}{a+S(t-\tau)} - DX(t), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $X(t)$ denota la densidad de la población depredadora en el tiempo t , $S(t)$ denota la densidad de la población presa en el tiempo t , m la máxima tasa de crecimiento para el depredador, D la tasa de mortalidad correspondiente al depredador, a la tasa de saturación media, esto es, la densidad de la población presa bajo la cual la cantidad de alimento ingerido por el depredador es igual a la mitad del máximo, γ la tasa intrínseca de crecimiento de la población presa. K es la capacidad de carga de la población presa.

Se tienen tres puntos de equilibrio del sistema: $E = (0, 0)$,

$$F = (K, 0) \text{ y } G = \left(\frac{aD}{m-D}, \frac{\gamma a}{(m-D)} \left(1 - \frac{aD}{K(m-D)}\right)\right).$$

Linealizando el sistema (4.18) alrededor de la solución (s^*, x^*) se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} S'(t) \\ X'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - \frac{2\gamma}{K}s^* - \frac{mx^*a}{(a+s^*)^2} & -\frac{ms^*}{a+s^*} \\ 0 & \frac{ms^*}{a+s^*} - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ X(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{mx^*a}{(a+s^*)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t-\tau) \\ X(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

Para $(s^*, x^*) = (0, 0)$, el sistema anterior se escribe como:

$$\begin{pmatrix} S'(t) \\ X'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ X(t) \end{pmatrix}$$

Así, el polinomio característico para este punto de equilibrio es

$$(\lambda - \gamma)(\lambda + D) = 0.$$

Para $(s^*, x^*) = (K, 0)$, el sistema se escribe como:

$$\begin{pmatrix} S'(t) \\ X'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{-mK}{a+K} \\ 0 & \frac{mK}{a+K} - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ X(t) \end{pmatrix}$$

El polinomio característico para este otro punto de equilibrio es

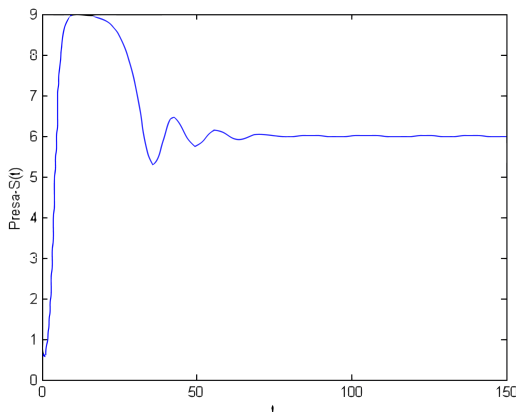
$$(\lambda + \gamma) \left(\lambda - \frac{mK}{a+K} + D \right) = 0$$

Los siguientes teoremas nos dicen que los puntos de equilibrio del sistema anterior con retardo, tienen el mismo comportamiento local que en el caso de un sistema sin retardo.

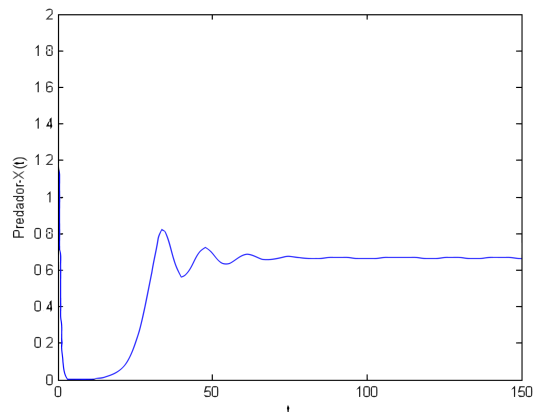
Teorema 4.2 Si $m - D < 0$ o $\frac{aD}{m-D} > K$, los únicos puntos de equilibrio del sistema (4.18) son E y F , siendo E una silla y F local asintóticamente estable.

Teorema 4.3 Si $aD/(m - D) < K$ y $m - D > 0$ entonces el único punto interior del cono $C = C([- \tau, 0], \mathbb{R}_+^2)$ es G . Es decir, G existe si y sólo si $m - D > 0$ y $aD/(m - D) < K$. Además, el punto G es local asintóticamente estable si $K < a + 2s_0$, con $s_0 = \frac{aD}{m-D}$

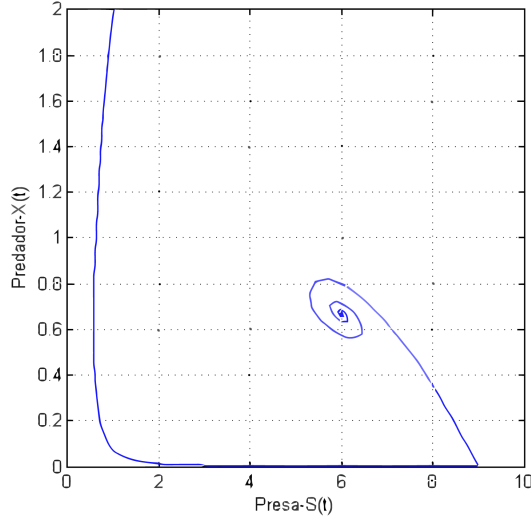
Consideremos $\gamma = 1$, $K = 9$, $m = 4$, $a = 2$, $D = 3$ y $\tau = 1$. Con estos parámetros se satisfacen las condiciones del teorema anterior y $G = (6, 2/3)$. Tomando como historias las constantes $s_0 = 1$ y $x_0 = 2$, los resultados obtenidos son



(o) Dinámica de la población presa



(p) Dinámica de la población predadora



(q) Plano fase del sistema

4.5. Ejemplo

En Gan et al [4] se estudia

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= r_1 x(t) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{k}\right) - \frac{a_1 x(t)y(t)}{m y(t) + x(t)}, \\ \dot{y}(t) &= y(t) \left(-r_2 + \frac{a_2 x(t)}{m y(t) + x(t)}\right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Aquí $x(t)$, $y(t)$ representan la densidad de presas y depredadores en el tiempo t , respectivamente, el parámetro $\tau \geq 0$, es el retardo que regula la presa. Los parámetros a_1 , a_2 , r_1 , r_2 , k y m son contantes positivas cuyo significado ecológico es el siguiente: r_1 es la tasa de crecimiento intrínseco de la presa, k la capacidad de carga de la presa, a la tasa de captura de la presa, m la tasa de saturación media, r_2 la tasa de mortalidad del depredador, y a_2 la tasa de conversión.

Las condiciones iniciales (o historia) son:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \phi(\theta), \quad y(\theta) = \varphi(\theta), \quad \phi(\theta) \geq 0, \quad \varphi(\theta) \geq 0, \\ \theta &\in [-\tau, 0], \quad \phi(0) > 0, \quad \varphi(0) > 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde $(\phi(\theta), \varphi(\theta)) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}_{+0}^2)$, el espacio de Banach de funciones continuas $[-\tau, 0]$ en \mathbb{R}_{+0}^2 , donde $\mathbb{R}_{+0}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

El equilibrio positivo es

$$x^* = k - \frac{k a_1 (a_2 - r_2)}{m a_2 r_1}, \quad y^* = \frac{k (a_2 - r_2)}{m r_2} - \frac{k a_1 (a_2 - r_2)^2}{m^2 a_2 r_1 r_2}.$$

El cual existe si

$$a_2 > r_2 \quad \text{y} \quad m a_2 r_1 > a_1 (a_2 - r_2).$$

La linealización alrededor del equilibrio positivo es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= p_1 x(t) + p_2 y(t) + p_5 x(t - \tau), \\ \dot{y}(t) &= p_3 x(t) + p_4 y(t), \end{aligned}$$

Donde

$$p_1 = \frac{a_1 r_2 (a_2 - r_2)}{m a_2^2}, \quad p_2 = \frac{-a_1 r_2^2}{a_2^2}, \quad p_3 = \frac{(a_2 - r_2)^2}{m a_2}, \quad p_4 = \frac{r_2 (r_2 - a_2)}{a_2}, \quad p_5 = -\frac{r_1 x^*}{k}.$$

Entonces si suponemos que

$$p_1 + p_4 + p_5 < 0 \text{ y } p_4 p_5 > 0.$$

Y si

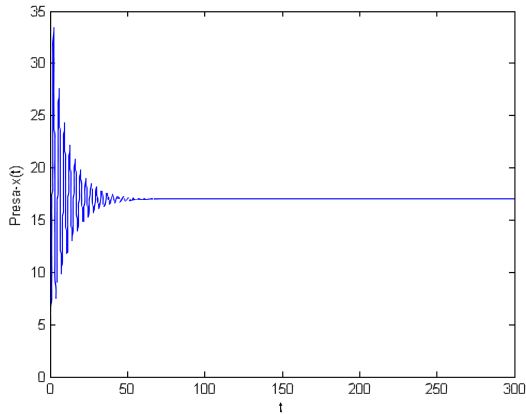
$$w_0 = \left[\frac{1}{2} \left((p_5^2 - (p_1 + p_4)^2) + \sqrt{(p_5^2 - (p_1 + p_4)^2)^2 + 4p_4^2 p_5^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

y definimos

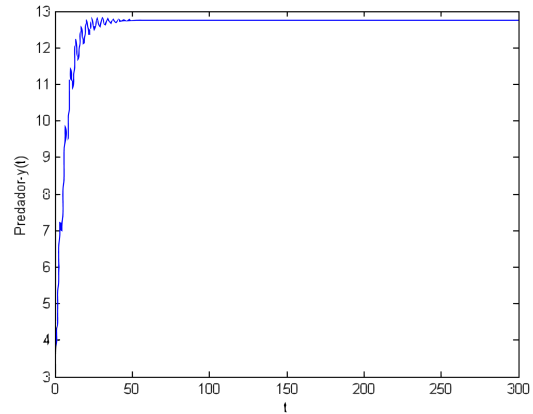
$$\tau_j = \frac{1}{w_0} \left(\arcsin \frac{-w_0(w_0^2 + (p_1 + p_4)p_4)}{p_5(p_4 + w_0^2)} + 2j\pi \right), \quad j = 0, 1, \dots$$

Tenemos que el equilibrio positivo es asintóticamente estable para toda $\tau \in [0, \tau_0)$ e inestable para $\tau > \tau_0$. Tomemos $r_1 = 2$, $r_2 = 0,4$, $a_1 = a_2 = 1$, $k = 20$, $m = 2$, e historias constantes $x_0 = 2,5$, $y_0 = 4$. Los resultados obtenidos son:

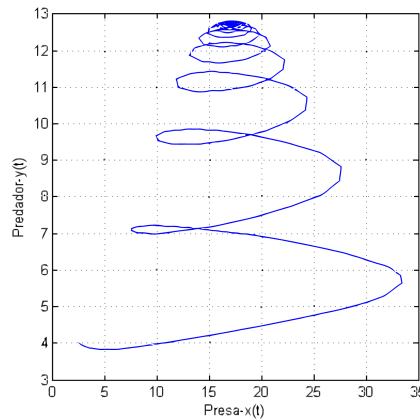
Para $\tau = 0,8$



(r) Dinámica de la población presa

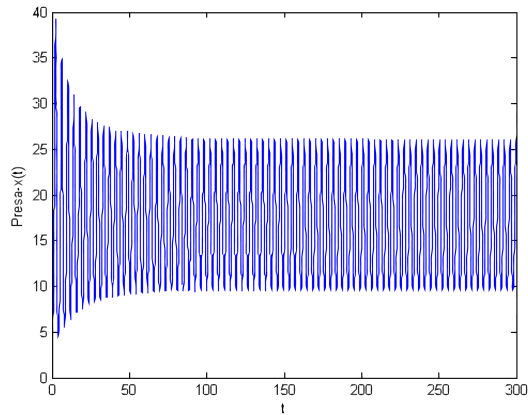


(s) Dinámica de la población depredadora

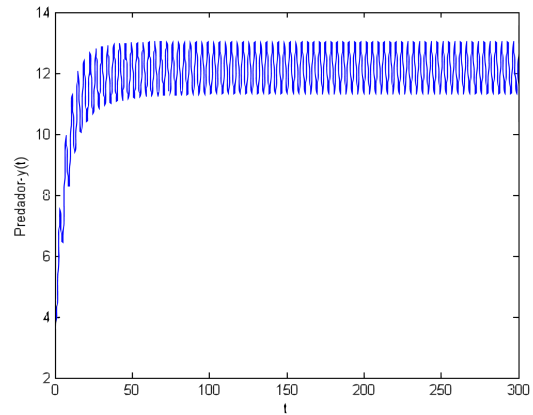


(t) Plano fase del sistema

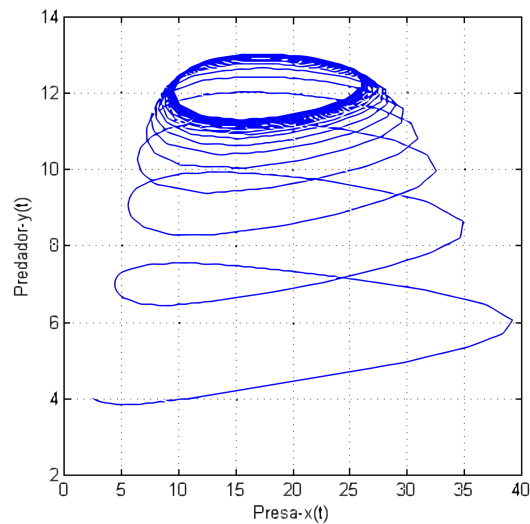
Para $\tau = 0,9$



(u) Dinámica de la población presa



(v) Dinámica de la población predatora



(w) Plano fase del sistema

Nótese que para valores pequeños del retardo, las oscilaciones que las soluciones presentan inicialmente se van amortiguando al ir avanzando el tiempo. En contraste, al aumentar el retardo dichas oscilaciones son cada vez menos amortiguadas con el transcurso del tiempo hasta que dejan de serlo al llegar al primer valor crítico del retardo en el cual hay una bifurcación de Hopf.

5. Sistemas de ecuaciones ordinarias con retardo distribuido

Consideremos un sistema de la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f_1 \left(x, y, \int K(s)G_1(x(t-s), y(t-s))ds \right) \\
 &= f_1 \left(x, y, \int K(s)G_1(x_s, y_s)ds \right) \\
 \dot{y} &= f_2 \left(x, y, \int K(s)G_2(x(t-s), y(t-s))ds \right) \\
 &= f_2 \left(x, y, \int K(s)G_2(x_s, y_s)ds \right)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde f_i, K, G_i son suficientemente diferenciables para que exista la solución del sistema.

Similarmente al caso de una ecuación, un punto de equilibrio (x_0, y_0) satisface

$$f_1(x_0, y_0, G_1(x_0, y_0)I) = 0 \quad (5.2)$$

$$f_2(x_0, y_0, G_2(x_0, y_0)I) = 0, \quad (5.3)$$

donde $I = \int K(s)ds$

5.1. Linealización

Una solución cercana al punto de equilibrio de la forma $(x, y) = (x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v)$ cumple

$$\dot{x} = \epsilon \dot{u} = f_1 \left(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v, \int K(s)G_1(x_0 + \epsilon u_s, y_0 + \epsilon v_s)ds \right), \quad (5.4)$$

$$\dot{y} = \epsilon \dot{v} = f_2 \left(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v, \int K(s)G_2(x_0 + \epsilon u_s, y_0 + \epsilon v_s)ds \right). \quad (5.5)$$

Por medio de aproximaciones de Taylor para funciones de dos variables obtenemos para $i = 1, 2$

$$G_i(x_0 + \epsilon u_s, y_0 + \epsilon v_s) \approx G_i(x_0, y_0) + \partial G_i x(x_0, y_0) \cdot \epsilon u_s + \partial G_i y(x_0, y_0) \cdot \epsilon v_s,$$

donde $\partial G_i x$ y $\partial G_i y$ son las derivadas parciales de G_i con respecto a la primera variable y a la segunda variable respectivamente; de esta forma

$$\begin{aligned} & \int K(s)G_i(x_0 + \epsilon u_s, y_0 + \epsilon v_s)ds \\ & \approx \int K(s) (G_i(x_0, y_0) + \partial G_i x(x_0, y_0) \cdot \epsilon u_s + \partial G_i y(x_0, y_0) \cdot \epsilon v_s) ds \\ & = G_i(x_0, y_0) \int K(s)ds + \epsilon \partial G_i x(x_0, y_0) \int K(s)u_s ds + \epsilon \partial G_i y(x_0, y_0) \int K(s)v_s ds \\ & = G_i(x_0, y_0)I + \epsilon \left(\partial G_i x(x_0, y_0) \int K(s)u_s ds + \partial G_i y(x_0, y_0) \int K(s)v_s ds \right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} & f_i \left(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v, \int K(s)G_i(x_0 + \epsilon u_s, y_0 + \epsilon v_s)ds \right) \\ & \approx f_i \left(x_0 + \epsilon u, y_0 + \epsilon v, G_i(x_0, y_0)I + \epsilon \left(\partial G_i x(x_0, y_0) \int K(s)u_s ds \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \partial G_i y(x_0, y_0) \int K(s)v_s ds \right) \right) \\ & \approx f_i(x_0, y_0, G_i(x_0, y_0)I) + \partial f_i x(x_0, y_0, G_i(x_0, y_0)I) \cdot \epsilon u \\ & \quad + \partial f_i y(x_0, y_0, G_i(x_0, y_0)I) \cdot \epsilon v + \partial f_i z(x_0, y_0, G_i(x_0, y_0)I) \\ & \quad \cdot \epsilon \left(\partial G_i x(x_0, y_0) \int K(s)u_s ds + \partial G_i y(x_0, y_0) \int K(s)v_s ds \right) \\ & = \epsilon \left[\partial f_i x(x_0, y_0, G_i(x_0, y_0)I) \cdot u + \partial f_i y(x_0, y_0, G_i(x_0, y_0)I) \cdot v \right. \\ & \quad \left. + \partial f_i z(x_0, y_0, G_i(x_0, y_0)I) \cdot \left(\partial G_i x(x_0, y_0) \int K(s)u_s ds \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \partial G_i y(x_0, y_0) \int K(s)v_s ds \right) \right] \\ & = \epsilon \left[\partial f_i x \cdot u + \partial f_i y \cdot v + \partial f_i z \cdot \left(\partial G_i x \int K(s)u_s ds + \partial G_i y \int K(s)v_s ds \right) \right], \quad (5.6) \end{aligned}$$

donde $\partial f_i x$, $\partial f_i y$ y $\partial f_i z$ son las derivadas parciales de f_i con respecto a la primera variable, a la segunda variable y a la tercera variable, respectivamente y todas ellas están evaluadas en el punto $(x_0, y_0, G_i(x_0, y_0)I)$

y las derivadas parciales de G_i están evaluadas en (x_0, y_0) . Note que la segunda aproximación en la última serie, es por medio de polinomios de Taylor en tres variables para la función f . Finalmente, combinando (5.4, 5.5) con (5.6) obtenemos el sistema

$$\dot{u} = \partial f_1 x \cdot u + \partial f_1 y \cdot v + \partial f_1 z \cdot \left(\partial G_1 x \int K(s) u_s ds + \partial G_1 y \int K(s) v_s ds \right), \quad (5.7)$$

$$\dot{v} = \partial f_2 x \cdot u + \partial f_2 y \cdot v + \partial f_2 z \cdot \left(\partial G_2 x \int K(s) u_s ds + \partial G_2 y \int K(s) v_s ds \right). \quad (5.8)$$

Usando notación matricial, podemos escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + J_D \begin{bmatrix} \int K(s) u(t-s) ds \\ \int K(s) v(t-s) ds \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1 x & \partial f_1 y \\ \partial f_2 x & \partial f_2 y \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} J_D &= \begin{bmatrix} \partial f_1 z \partial G_1 x & \partial f_1 z \partial G_1 y \\ \partial f_2 z \partial G_2 x & \partial f_2 z \partial G_2 y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial f_1 z & 0 \\ 0 & \partial f_2 z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial G_1 x & \partial G_1 y \\ \partial G_2 x & \partial G_2 y \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde las derivadas parciales se evalúan en los puntos adecuados mencionados antes. La ecuación (5.9) es la linealización de (5.1) cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0) .

5.2. Ecuación característica

Para encontrar la ecuación característica, supongamos $(u, v) = (C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\lambda t})$, al sustituir en (5.9) obtenemos

$$\lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} J \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{\lambda t} \int K(s) e^{-\lambda s} ds \cdot J_D \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$\lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \int K(s) e^{-\lambda s} ds \cdot J_D \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

o equivalentemente

$$\left[\lambda I - J - \int K(s) e^{-\lambda s} ds \cdot J_D \right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0,$$

y este sistema tienen una solución no trivial si

$$\det \left[\lambda I - J - \int K(s) e^{-\lambda s} ds \cdot J_D \right] = 0.$$

donde J y J_D son las matrices definidas por (5.10, 5.11) Esta última ecuación es conocida como la ecuación característica de (5.1). Ya que estamos trabajando con matrices de 2x2, esta ecuación se transforma en

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda - \partial f_1 x & -\partial f_1 y \\ -\partial f_2 x & \lambda - \partial f_2 y \end{pmatrix} - \int K(s) e^{-\lambda s} ds \cdot \begin{pmatrix} \partial f_1 z & 0 \\ 0 & \partial f_2 z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial G_1 x & \partial G_1 y \\ \partial G_2 x & \partial G_2 y \end{pmatrix} \right] = 0.$$

5.3. Combinación de retardo distribuido y retardo discreto

En ocasiones se presentan combinaciones de retardo discreto y distribuido o varios retardos discretos y varios distribuidos, por ejemplo, en un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1 \left(x, y, x_T, y_T, \int K(s)G_1(x_s, y_s)ds \right) \\ \dot{y} &= f_2 \left(x, y, x_T, y_T, \int K(s)G_2(x_s, y_s)ds \right),\end{aligned}$$

en estos casos se procede en forma similar a la presentada considerando cada tipo de retardo.

5.4. Ejemplo

Xu-Chaplain-Davison presentan en [16] un sistema con retardo distribuido de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t)+x(t)} \right), \\ \dot{y}(t) &= y(t) \left(-d + f \int_0^\infty K(s) \frac{x(t-s)}{my(t-s)+x(t-s)} ds \right)\end{aligned}\tag{5.12}$$

con condiciones iniciales (o historia):

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) &= (\phi_1(t), \phi_2(t)), t \in (-\infty, 0] \\ \phi_i(t) &\geq 0, \phi_i(0) > 0, i = 1, 2;\end{aligned}\tag{5.13}$$

donde las funciones ϕ_i son continuas y acotadas, a, b, c, d, f y m son constantes positivas con significado ecológico similar al de los parámetros correspondientes en el ejemplo anterior presentado en Gan et al [4] y el kernel $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ satisface

$$\sigma := \int_0^\infty sK(s)ds < \infty, \quad I = \int_0^\infty K(s)ds = 1\tag{5.14}$$

Aquí las variables x, y representan la densidad de la presa y el depredador respectivamente, así el sistema anterior es un sistema depredador-presa con dependencia en el cociente (ratio dependent) con un funcional de respuesta tipo Michaelis-Menten con retardo distribuido, que representa, por ejemplo, la gestación en la presa.

Este sistema se puede escribir de la forma (5.1) tomando

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= x \left(a - bx - \frac{cy}{my + x} \right), \\ f_2(x, y, z) &= y(-d + fz), \\ G_1(x, y) &= 0, \\ G_2(x, y) &= \frac{x}{my + x}.\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio satisfacen

$$\begin{aligned}f_1(x_0, y_0, G_1(x_0, y_0)) &= x_0 \left(a - bx_0 - \frac{cy_0}{my_0 + x_0} \right) = 0, \\ f_2(x_0, y_0, G_2(x_0, y_0)) &= y_0 \left(-d + \frac{fx_0}{my_0 + x_0} \right) = 0,\end{aligned}$$

cuya única solución positiva existe sí y sólo si

$$0 < f - d < \frac{afm}{c}$$

y está dada por

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{afm - c(f - d)}{bfm}, \\y_0 &= \frac{(afm - c(f - d))(f - d)}{bdfm^2}.\end{aligned}$$

Seguendo (5.9-5.11), la linealización cerca de este punto de equilibrio queda de la forma

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= Au(t) + Bv(t), \\ \dot{u}(t) &= C \int_0^\infty K(s)u(t-s)ds + D \int_0^\infty K(s)v(t-s)ds,\end{aligned}\tag{5.15}$$

donde

$$\begin{aligned}A &= \frac{c(f^2 - d^2) - maf^2}{mf^2}, \\ B &= -c \left(\frac{d}{f}\right)^2, \\ C &= \frac{c(f-d)^2}{mf}, \text{ y} \\ D &= -\frac{d(f-d)}{f},\end{aligned}$$

y su ecuación característica es

$$\lambda^2 - \left(A + D \int_0^\infty K(s)e^{-\lambda s} ds \right) \lambda + (AD - BC) \int_0^\infty K(s)e^{-\lambda s} ds = 0.\tag{5.16}$$

Notemos que en este caso la ecuación característica es un poco más complicada que en el caso con retardo discreto, ya que en ella aparece multiplicando a algunos términos la integral $\int_0^\infty K(s)e^{-\lambda s} ds$. Esto causa que el análisis de estabilidad se complique un poco más, aunque la idea de la metodología mencionada anteriormente en la que se determina cuándo un par de raíces corta el eje imaginario, se sigue empleando pero con algunas variantes, como se puede ver en [16]. El resultado principal presentado ahí relacionado con la estabilidad local del punto de equilibrio positivo es el siguiente:

Teorema 5.1 *Supongamos que $A < D$. Entonces el equilibrio positivo de (5.12) es localmente estable para cualquier kernel que cumpla (5.14) y tal que $0 \leq \sigma < \sigma_L$, donde*

$$\sigma_L := \frac{D - A}{AD - BC}.$$

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por SNI, número de registro 15284

Referencias

- [1] E. Beretta, Y. Kuang, *Geometric stability switch criteria in delay differential systems with delay dependent parameters*, SIAM J. Math. Anal., Vol. **33**, (2002), pp.1144–1165.
- [2] R. Espinosa Riquelme et al, *Influencia del retardo en un tumor sometido a un tratamiento periódico*, Revista Cubana de Física, Vol. **22**, No. 2, (2005), pp. 183–187.

- [3] A.G. Estrella Gonzáles, G.E. García Almeida, y E.J. Avila Vales, *Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones*, Miscelánea Matemática, Sociedad Matemática Mexicana, No. 51, (2010), pp. 73–92.
- [4] Q. Gan, R. Xu, P. Yang, *Bifurcation and chaos in a ratio-dependent predator-prey system with time delay*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol **39**, No. 4, (2009), pp. 1883–1895
- [5] T. Kar, *A mathematical model of bio-economic harvesting of a nonlinear prey-predator system*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. **37**, No. 3, (2006), pp. 309–319.
- [6] T. Kar, K. Chaudhuri, *On non-selective harvesting of a multispecies fishery*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. **33**, No. 4, (2002), pp. 543–556.
- [7] Y. Kuang, *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*, Academic Press, San Diego, 1993.
- [8] Y. Kuang, E. Beretta, *Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system*, Journal of Mathematical Biology, Vol. **36**, (1998), pp. 389–406.
- [9] A. Maiti, G.P. Samanta, *Deterministic and stochastic analysis of a ratio dependent prey-predator system*, International Journal of System Sciences, Vol. **37**, No. 12, (2006), pp. 817–826.
- [10] J. Marín, M. Cavani, *Propiedades cualitativas de un modelo depredador-presa con retardo*, Divulgaciones Matemáticas, Vol. **9**, No. 2, (2001), pp. 123–136.
- [11] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 2001.
- [12] D. Purohit, K. Chaudhuri, *Nonselective harvesting of a prey-predator fishery with Gompertz law of growth*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. **33**, No. 5, (2002), pp. 671–678.
- [13] Rodríguez-Pérez, et al, *Assesment of cancer immunotherapy outcomes in terms of the immune response time features* Math Med Biol, Vol **24**, No. 3, (2007), pp. 287–300.
- [14] S. Ruan, *Delay Differential Equations in Single Species Dynamics*, O. Arino et al. (eds.) Delay Differential Equations with Applications, Springer, Berlin, 2006.
- [15] L.F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson, *Solving ODEs with MATLAB*, Cambridge University Press, UK, 2003.
- [16] R. Xu, F.A. Davidson, M.A.J. Chaplain, *Persistence and stability for a two-species ratio-dependent predator-prey system with distributed delay*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **269**, (2002), pp. 256–277.