UADY
FACULTAD DE EDUCACIÓN

EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE EL TEOREMA DE BAYES Y SU INTERACCIÓN CON EL SABER ESTOCÁSTICO

Jorge Carlos Tuyub Moreno

Tesis elaborada para obtener el grado de Maestro en Investigación Educativa

Tesis dirigida por

Jesús Enrique Pinto Sosa

Mérida, Yucatán

Enero 2016

UADY
FACULTAD DE EDUCACIÓN

FORMULARIO 3

APROBACIÓN DEL TRABAJO FINAL

Mérida, Yucatán a 5 de junio de 2015

Dr. Pedro J. Canto Herrera
Jefe de la Unidad de Posgrado e Investigación
Facultad de Educación, UADY
PRESENTE

Los abajo firmantes miembros del Comité Revisor nombrado por la dirección de la Facultad de Educación y en respuesta a su solicitud para revisar la tesis:

"EL CONOCIMENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE EL TEOREMA DE BAYES Y SU INTERACCIÓN CON EL SABER ESTOCÁSTICO"

Presentado por JORGE CARLOS TUYUB MORENO para obtener el grado de MAESTRO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA, le comunicamos que el trabajo cumple con los requisitos de contenido y presentación establecidos por este Comité y por el Comité de Examen Profesional, de Especialización y de Grado, por lo tanto el dictamen que emitimos es de:

Aprobado

Por lo que puede proceder a la etapa de presentación y defensa del mismo.

Atentamente
Comité Revisor

Dr. Javier Lezama Andalón
Co-Director y Miembro propietario

Mtra. Martha I. Jarero Kumul
Miembro propietario

Dr. Jesús E. Pinto Sosa
Director y Miembro propietario

FACULTAD DE EDUCACIÓN
RECIBIDO
- 5 JUN 2015
UNIDAD DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

C.c.p. Expediente del alumno en Control Escolar
C.c.p. Interesado

Declaro que esta tesis es

mi propio trabajo, con excepción de las

citas en las que he dado crédito a sus

autores, asimismo afirmo que

este trabajo no ha sido presentado

para la obtención de algún

título, grado académico o equivalente.

Jorge Carlos Tuyub Moreno

Agradezco el apoyo brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado la beca No. 293193 durante el período de septiembre de 2013 a agosto de 2015 para la realización de mis estudios de maestría que concluye con esta tesis, como producto final de la Maestría en Investigación Educativa de la Universidad Autónoma de Yucatán.

La Educación es, ante todo, un proceso que te permite persuadir a otros de la fuerza de un argumento o de la fuerza de un imperativo ético.

Carlos Alberto Torres (2004)

X

Agradecimientos

Debido a los problemas euclidianos y físicos con los que lidia la expresión escrita, no es posible colocar todos los nombres en el mismo instante y en el mismo espacio, siendo necesario enfatizar que el sentimiento es el mismo sin incrementarse o disminuirse por la posición ni un solo gramo.

Agradezco profundamente a mi asesor el Dr. Jesús Enrique Pinto Sosa por la dedicación de su tiempo y el acompañamiento en este proceso.

Al mi coasesor el Dr. Javier Lezama por los espacios brindados para la reflexión y sus comentarios que generan dudas, direccionan y fundamentan ideas. ¡Infinitas gracias!

A la Mtra. Martha Jarero, por aceptar nuevamente el formar parte en mi formación profesional; sus comentarios y cuestionamientos fueron destellos de luz en momentos de incertidumbre. ¡Millones de Gracias!

A Nery, Mayra, Erika, Carlos, Triny, Abdel y Luis sus puntos de vista y su forma de ver la vida han hecho que valore aún más este proceso.

A mi familia, y a todos los que he incluido como mi familia, por sus ánimos, su compañía, por enseñarme a creer en mí y en mis ideas. ¡Los Amo!

Y a Dios, porque providencialmente me puso en el momento y tiempo indicado para lograr esta meta.

Resumen

Una de las cuestiones que la investigación en la educción matemática, la matemática educativa y la didáctica de las matemáticas han mostrado mayor afluencia en la última década, gira en torno al profesor de matemáticas y aquello que construye en el aula para el aprendizaje. Lo último señala la importancia de la relación *profesor* y *el saber matemático*, en su interacción y en la búsqueda de significados para proponer mecanismos, representaciones, situaciones, condiciones y experiencias lo más honestas posibles del *saber* que se desea construir en el aula.

En términos de Brousseau (1986) y Brousseau (1989), esta relación es crucial en el aprendizaje de las matemáticas debido a los obstáculos en la *transposición didáctica* que sufren los saberes; demandando del profesor una construcción del saber que lo haga inteligible y perceptible sin caer en distorsiones. Dichas construcciones evocan a los significados que el profesor le atribuye al saber matemático, siento la construcción y trasmisión de significados el objetivo de la enseñanza (Orton, 1996). Por tanto, mirar la interacción del conocimiento del profesor de matemáticas y el saber matemáticos, en términos de los significados que construye se convierte en parte importante de la investigación, pues como señalan Uc (2015), Serrano (2005), Godino y Llinares (2000) y Llinares (1989) estas determinan el uso, las explicaciones, los alcances y la propia actuación del individuo.

Bajo esta perspectiva, se realizó un estudio sobre la interacción del conocimiento del profesor de matemáticas y el saber estocástico, a fin de conocer los significados atribuidos al saber en su enseñanza en el aula. Fue necesario delimitar los saberes

estocásticos a uno en particular, el Teorema de Bayes, debido a la complejidad de pensamiento ya que convergen el inductivo (estadística) y deductivo (probabilidad), y requiere de un proceso inverso a la probabilidad frecuentista; lo que conlleva a que el profesor debe tener no solo un buen dominio de los contenidos, sino una compresión de los estocásticos.

La investigación se contó con la participación de dos profesores de matemáticas del Nivel Medio Superior, a fin de identificar los significados asociados a los estocásticos y hacer una interpretación de las propuestas basados en esos significados. Para ello, se necesitó establecer mecanismos de recolección de datos, que se basan en la entrevista a profundidad, la resolución de problemas y el análisis de materiales didácticos para la enseñanza del Teorema de Bayes.

En cuanto al análisis se realizaron estrategias de inducción que permitieron a partir de los datos identificar las variables y las posibles relaciones entre ellos, así como la influencia que tienen sobre las propuestas de enseñanza. Estas variables surgen de la categorización y subcategorización de la información haciendo uso de los indicadores y subindicadores propuestos por Pinto (2010) para los estudios sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido en los profesores de estadística.

Se encontró que los profesores mantienen didácticas diferentes entorno a la enseñanza de los estocásticos marcando distinciones en el tratamiento que le dan a la Estadística Descriptiva y a la Probabilidad, dependiente de los significados asociado a los saberes. En particular, los significados entorno al Teorema de Bayes premian un discurso matemático que subyace a su concepción de probabilidad, y por ende, genera una propuesta que busca responder lo que el profesor concibe como el aprendizaje de los estocásticos y tiene sobre la enseñanza de las matemáticas.

Índice de Contenido

Índice de Tablas

Índice de Figura

Capítulo 1.
El problema de Investigación

Introducción

En México, se reconoce la necesidad de formar a los individuos en el análisis e interpretación de los datos, como respuesta se incorpora al nivel básico la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (PyE) en la reforma curricular de 1975, y en los próximos años, de forma más lenta en el Nivel Medio Superior (NMS) (Juárez e Inzunsa, 2014). Actualmente los diversos sistemas y subsistemas de bachillerato, que operan en el sistema educativo mexicano, cuentan con una asignatura obligatoria dentro de su curricular dedicada a la formación estadística y probabilística, como parte de la formación de los estudiantes para desempeñarse en su sociedad, en el ámbito laboral o bien en un nivel universitario (DGB, 2013; UNAM, 2013; SEP, 2013)

En tema, la Secretaria de Educación Pública (SEP), en su la Actual Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), establece que el propósito de la asignatura de probabilidad y estadística es:

> *Aplica herramientas de estadística y probabilidad para el estudio de un proceso o fenómeno real del contexto, siendo colaborativo, reflexivo, honesto, responsable, innovador, con actitud positiva y de respecto.* (SEP, 2013)

La propuesta de la SEP de pretender generar en el alumno la competencia para *aplicar las herramientas de estadística y probabilidad a un proceso o fenómeno del contexto* pareciese una tarea sencilla, pero tácitamente requiere de un proceso de pensamiento complejo: primero, se necesita discernir sobre si el fenómeno o proceso en el que se desea incidir es o no de carácter estocástico, consecuentemente, tomar la decisión sobre las herramientas que mejor resuelvan el problema: sí requiere de a Estadística o bien de la Probabilidad, y por último, de toda esa gama de herramientas discernir cuál o cuáles son las más adecuadas. La propuesta representa un reto para el alumno y más para el profesor quien debe quien debe propiciar las condiciones necesarias para que los alumnos puedan desarrollar el tipo de pensamiento necesario de dicha competencia.

En cuanto a la labor del profesor de matemáticas, investigaciones como la Azcárate (2006), Ortega (2009) y Espínola (2014) dan cuenta de las dificultades de la labor docente en la enseñanza de la PyE afirmando que el desempeño en el aula está subyugada por su formación y conocimientos, implicando una problemática ya que de él (profesor) dependen en gran parte la propuesta que se lleva al aula sobre los saberes que se deben enseñar. Es por ello, que el *Capítulo 1* pretende ejemplificar la problemática que se presenta en un escenario escolar centrando la atención en los significados que asocia *al saber* y la generación de propuestas respecto a la enseñanza de la PyE.

Para tal fin, es necesario considerar que la interacción que se propone abordar es del profesor con el *saber matemático* presente dentro de un curso de PyE; dichos *saberes* se les denomina *estocásticos* a fin de resumir el discurso y para ser puntuales en el escenario al que se refiere.

El Capítulo 1, está estructurado en cuatro apartados *el problema con los estocásticos, el conocimiento de los profesores de matemáticas, el problema de investigación y la pertenencia de la investigación.*

El problema con los estocásticos, aborda una postura diferente que nace de asumir que la enseñanza de *estocásticos* requiere de un conocimiento en uso y de la propiciación de un pensamiento específico; siendo necesarios pensar en la naturaleza de dichos saberes estocásticos.

En el apartado sobre *el conocimiento de profesores*, pretende resaltar la importancia de la investigación centrada en su conocimiento y la forma en que construye dicho conocimiento, dejando lugar al conocimiento asociado a los significados de los saberes.

Los dos últimos apartados, *el problema de investigación* y *la pertinencia de investigación,* nos plantean el interés y los objetivos que se pretenden alcanzar en esta investigación.

1.1. El problema en la en el currículo de estocásticos

Las condiciones actuales de la sociedad imponen la necesidad de formar individuos que sean críticos y reflexivos de la realidad en la que se encuentran, capaces de tomar decisiones a través de la recopilación de información de su entorno bajo condiciones de incertidumbre, siendo pertinente contribuir a una didáctica de la PyE que favorezca la generación de conocimiento usados en este tipo de escenarios. (Azcárate y Cardeñoso, 2003; Rocha, 2007; Del Pino y Estrella, 2012, Ortiz, 2014).

Es por ello que los diferentes grupos de investigación que tienen interés en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han puesto énfasis en generar entendimiento sobre aquellos factores que intervienen en la construcción, difusión y producción de los *estocásticos* en el aula (Shaugnessy, 1992; Azcárate, 2006).

Haciendo un paréntesis, es importante aclarar porque *saber* y no *conocimiento.* Para Cantoral, Montiel y Reyes-Gasparini (2015) hay una diferencia entre *conocimiento* y *saber*, el primero evoca a una definición formal, declarativa o relacional, es decir, *el conocimiento de algo*, el segundo se refiere al uso del conocimiento bajo ciertas condiciones, que brindan significado y permiten su aplicación, *el conocimiento sobre algo*. Por tanto, cuando nos centramos el "*saber matemático*" más que el "*conocimiento matemático*", estamos preocupados por desarrollar *pensamiento matemático*[1]

Si bien, la estadística y la probabilidad son consideradas como parte de las matemáticas, esta requiere la generación de un tipo de pensamiento diferente a las que se encuentran presentes en otras áreas de la misma (Azcárate, 2006; Rocha, 2007; García, Medina, y Sánchez, 2014; Elizarrarás, 2014). La PyE busca desarrollar en el individuo un *pensamiento estocástico*, que tiene un grado de complejidad diferente al que presentan el determinista que permea gran parte de las áreas de la disciplina como son el álgebra, la geometría o el cálculo, por nombrar algunas.

Para Elizarrás (2014) y Salcedo (2006) el *pensamiento estocástico* es la capacidad de tomar decisiones bajo condiciones de incertidumbre mediante la interpretación y uso de la información que se obtienen en un fenómeno, dicha decisión deber ser bajo una base racional, científica y ética. delMas (2002), citado en Salcedo (2006), hace una distinción

[1] *Usamos el término pensamiento matemático para referimos a la diversidad de formas en que piensan las personas que se interesan por identificar, caracterizar o modelar conceptos y procesos propiamente matemáticos en ámbitos diversos, no sólo escolares.* Cantoral, Montiel y Reyes-Gasparini (2015), p.12

entre tres dominios que un individuo puede adquirir sobre lo estocástico, ya sea cultura estocástica, razonamiento estocástico y pensamiento estocástico dependiendo de la profundidad establecidas en los cursos. (Ver tabla 1)

Tabla 1.
Esquema propuesto por Salcedo (2006) basado en los dominios estocásticos de delMas (2002)

Dominio	**Definición**	**Palabras que lo identifican**
Cultura	La cultura implica comprender y utilizar el idioma y los instrumentos básicos: conocer el significado de los términos, utilizarlos apropiadamente y una interpretación meramente determinista	Identifique Describa Reformule Traduzca Interprete Lea
Razonamiento	El razonamiento es la forma en que los individuos argumentan sobre las ideas estocásticas, las relaciones entre conceptos, y dan sentido a la información que se pretenda. Es la capacidad de explicar y argumentar sobre los procesos estocásticos.	¿Por qué? ¿Cómo? Explique (el proceso)
Pensamiento	El pensamiento estocástico implica la comprensión del por qué y el cómo se realiza las investigaciones. Entendiendo cómo se utilizan los modelos para simular los fenómenos aleatorios, cómo los datos se producen para estimar las probabilidades, reconocimiento de cómo, cuándo, y por qué los instrumentos deductivos existentes se pueden utilizar, y son capaz de entender y utilizar el contexto de un problema para emitir conclusiones y planear investigaciones.	Apliqué Critique Evalué Generalice

En considerando lo dicho por delMas(2002), Salcedo (2006) afirma que la enseñanza de la PyE debe de ser de forma creciente partiendo del desarrollo de *una cultura estocástica*, luego un *razonamiento estocástico* y con la finalidad de llevar a los estudiantes hacia el *pensamiento estocástico*; además se debe ver como un proceso en espiral que se suscita en diferentes momentos de la instrucción de los individuos a lo largo de su trayecto educativo.

Para Shaugnessy (1992), Azcárate (2006), Batanero, Ortiz y Serrano (2007) y Juárez e Inzunsa (2014) existe un currículo oficial para la PyE en los diferentes niveles educativos que lamentablemente se basa en enseñanza de procedimientos y reglas para calcular estadísticas y probabilidades como medios para la resolución de problemas; es decir, se enfocan en desarrollar una *cultura estocástica* fundamentada en el conocimiento de los procedimientos, uso de las formulas, aprendizaje memorístico de las definiciones y terminologías. Espasandin (2006) sintetiza la problemática al mencionar que la enseñanza de la estadística y la probabilidad en las aulas deja de lado el desarrollo del *pensamiento estocástico* y centra a los estudiantes en un tratamiento determinista que omite la característica principal de los *estocásticos*.

Por tanto, es pertinente cuestionarse cómo mejorar la enseñanza de la PyE de tal forma que en el aula se propicie el *pensamiento estocástico* y no reducirlo a un *pensamiento determinista*, que si bien no es menos valido para el campo de las matemáticas, no permiten la construcción de los *estocásticos* en el aula, siendo oportuno una reflexión sobre su naturaleza.

1.1.1 La naturaleza de los saberes estocásticos

Azcarate (2006) menciona que la tendencia del enfoque más determinista en el ámbito escolar es debido a la naturaleza de los *estocástico*, ya que este tiene sus propias prácticas de referencia que los distingue de otras formas de pensamiento que están inmersas dentro de la matemática y norma su construcción, difusión y negociación; que al no ser entendida en totalidad, dan pie a otras problemáticas que se viven dentro del aula escolar como la propuesta curricular de las instituciones, el tratamiento que se ofrecen en los libros de texto y la formación que tiene los profesores que enseñan PyE (este último hace énfasis al conocimiento del profesor de matemáticas).

Al respecto Da Ponte y Fonseca (2001) señalan que a diferencia de otros áreas de la matemática, su objeto no son concepto y saberes simples, y las concepciones que se tengan de ellos determinan el tratamiento y discursos que se presentan en el aula de clases, pudiendo reducirlo a un simple análisis de datos, una expansión de la aritmética o como elementos para el desarrollo de investigaciones.

En revisión bibliográfica se encontró la complejidad en la enseñanza y el aprendizaje de los *estocásticos* se debe a su *aproximación al cotidiano* y *la dualidad y complementariedad del pensamiento estocástico*, por tanto, se dedicará una explicación más detallada al respecto.

1.1.1.1 La aproximación al cotidiano

Es posible afirmar que todos en algún momento de nuestra vida habitual hemos realizado inferencia, construido hipótesis y calculado probabilidades para lidiar con los eventos de nuestra cotidianeidad; asimismo, hemos usado términos como probable, promedio, incierto, azar para expresar ideas que están relacionados con el pensamiento estocástico. En el ámbito escolar, es muy común escuchar al profesor de PyE sugerir problema o ejemplos de nuestro cotidiano para ejemplificar algunos conceptos, como hallar el promedio de las alturas de nuestros compañeros de clase, sacar el promedio de las edades, utilizar los datos del INEGI, entre otros.

De forma peculiar, los *saberes estocásticos* están cargados del uso que se le asignan a los términos y conceptos en el cotidiano en las distintas etapas de nuestro desarrollo e interacción con el mundo que nos rodea, permeando su construcción y difusión en el ámbito escolar (Callaert, 2004); la misma enseñanza de los estocásticos está cargada de hechos, datos e información que se obtienen o que tienen un referente en lo cotidiano para los individuos.

Esta *aproximación al cotidiano*, sugiere que cualquier individuo que se adentra a un curso de PyE tiene alguna noción respecto a los estocásticos, según Shaughnessy (1992), *los estudiantes tienen sus propias heurísticas, sesgo y creencias acerca de la probabilidad y estadística* (p.24) que surgen de su gama de experiencias en el cotidian, y validados en escenarios más cercados a los individuos.

Por su parte Azcárate (2006) señala que la problemática no solo tiene que ver con los juicios heurísticos, sino también con los conceptos del cotidiano que emergen en la lengua estocástica, al respecto señala:

> *Estas diferencias existentes entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje estocástico ocasionan obstáculos en la elaboración comprensiva de estos conocimientos. Lo que resulta problemático no son los términos imposible, seguro, suceso o experimento en sí mismos, sino los conceptos y procesos subyacentes que se están comunicando y el significado que transmiten.* (p.12)

En la matemática educativa trabajos como el de Zaldívar (2014) sobre el *cotidiano*, son un referente para atender a estas problemáticas. En su investigación se reconoce que estas formas de conocimiento que surgen en el cotidiano no representan conceptos iniciales o preconcepciones del saber, sino a que son un conjunto de conocimientos legítimos que se han adquirido relevancia en el uso, siendo válidos en un momento histórico, social y cultural. En síntesis, el trabajo de Zaldívar pone de manifiesto que la problemática de la didáctica de las matemáticas, y en particular de la estocástica, parte de la despersonalización de los saberes presentes en el aula y a considerar como saber ignorante aquellos que hemos aprendido en el cotidiano, atender a estas problemáticas es poner la mira en aquello que consienta la *resignificación de los estocástico* escolares.

1.1.1.2 La cualidad y complejidad del pensamiento estocástico

Biehler (1994), Borovcnik (2005) y Rodríguez (2014) afirman que las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la PyE son debidos a las dos naturalezas que viven en el pensamiento estocástico, por un lado el pensamiento que requiere la estadística, y por otro, el que requiere la probabilidad.

> *Una distinción clave entre la probabilidad y la estadística es que la primera usa el método deductivo, mientras que la segunda es un campo de estudio fáctico y experimental, y se basa en un proceso inductivo, el cual debe de contrastarse en todo caso con la experiencia o la experimentación.* (Rodríguez, 2014)

Esta diferencia, es acentuada por algunos investigadores, que se han delimitado líneas de investigación en probabilidad, otra sobre la estadística, y en casos más específicos asociados a un saber estocástico, como lo es la teoría bayesiana.

Borovcnik (2005) señala que si hay una dificultad para diferenciar el pensamiento probabilístico del estadístico, sin embargo, pueden distinguirse su aplicación de acuerdo al contexto del fenómeno, a los propósitos de la investigación y a los datos. Para Borovcnik cuando un individuo se enfrenta a un fenómeno o proceso relacionado con los estocásticos, solo existen dos cosas en común la incertidumbre y la implementación de un modelo matemático que dé cuenta del fenómeno, pero que a partir de las interrogantes que se planteen se escoge ya sea un modelo probabilístico o uno estadístico, lo que requiere de pensar en ambos sentidos y tomar una decisión.

Es posible que el sesgo a algunos tipos de pensamiento es un erro común en los cursos, por ejemplo, la propuesta de los sistemas educativos hace una clara diferencia en el curso de PyE, la gran mayoría cuentan con tres apartados denominados: Estadística, Probabilidad y distribuciones de probabilidad, pareciendo que la estadística y la probabilidad son dos asignaturas que se han resumido en una y que son cursos aislados (SEP, 2013; UADY, 2013). Esta particularidad, contribuye a los errores en el tratamiento de los estocásticos dentro del aula, pues tanto el currículo como los profesores no son conscientes de esta naturaleza que si bien es dual no son mutuamente excluyentes, sino que se nutren y complementan entre sí. Una clara visión de la naturaleza del pensamiento estocástico nos conduce a mirar los alcances y aplicaciones que la PyE puede tener en los diferentes ámbitos de la sociedad.

1.2. Conocimiento del profesor de Matemáticas

La investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, señala al profesor como el elemento clave en el proceso de aprendizaje y de quien es preciso reflexionar y comprender a fin de fortalecer su práctica en las diferentes áreas de la disciplina matemática. (González y Pinto, 2006; Montiel, 2009; Cantoral, 2013; Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub, 2013).

En particular, sobre la enseñanza de la PyE se han realizados investigaciones que dan cuenta de la importancia de fijar la atención más en el profesor y lo que genera su práctica dentro del aula, haciendo énfasis en el conocimiento que tiene sobre la probabilidad y la estadística (Ver Tabla 2)

Tabla 2.
Investigaciones realizadas en torno al profesor de matemáticas en EYP

Autores	Contexto de la investigación	Resultados
Lavalle, Michel, Boche y Argentina (2003)	Un análisis de los juicios heurísticos que realizan los futuros profesores cuando se les presenta problemas probabilísticos, y después de haber tomado un curso de esa naturaleza	Existe una desvinculación de los conocimientos previos de los profesores y las situaciones problemáticas que se presentan, además que tienden a hacer uso de su heurística para brindar una solución inmediata, despreciando la naturaleza y condiciones de las situaciones que se presentan.

Espasandin (2004)	Se estudiaron a profesores en servicio y cómo ellos reflexionan sobre los conceptos de estadística y probabilidad como parte de su desarrollo profesional	La necesidad de formación del profesorado que le permita tomar decisiones a partir de lo estipulado en el currículo, para ello es necesario una formación en estocástico
Ortega (2009)	Caracterizar la reflexión sobre la práctica de los profesores de estadística de bachillerato del estado de Yucatán	Se notó que los profesores presentan carencias entorno a la reflexión que realizan sobre la práctica, lo que requiere de generar espacios donde los profesores puedan reflexionar sobre qué enseñanza, cómo lo enseñanza y porque lo enseñanza.
Carballo y Ojeda (2010)	Se estudiaron a profesores de primaria a fin de conocer sus estrategias y experiencias entorno a la enseñanza de estocásticos	Existe una desvinculación entre las propuestas y los objetos matemáticos, debido a no tener constituidas las ideas fundamentales de estocásticos (Heitel, 1975)
Pinto (2010)	El estudio se centra en profesores de universidades mexicanas, y sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) del que hacen uso los profesores en la representación de datos estadísticos	Los resultados demuestran que los profesores tienen una imagen del concepto representación gráfica limitada y obsoleta lo cual representa un problema. Esto limita mucho los contenidos a enseñar, la forma de abordar el aprendizaje y las estrategias y representaciones instrucciones que utiliza el profesor
Inzunsa y Guzmán (2011)	Estudio exploratorio sobre el conocimiento y comprensión de la probabilidad que muestran los profesores de secundaria mexicanos.	Una falta de entendimiento sobre las nociones de probabilidad, como la regla del producto, la suma de eventos no mutuamente excluyentes, entre otros. Lo que demuestra una falta de

		comprensión de los profesores respecto a la probabilidad
Juárez e Inzunsa (2014)	Estudio exploratorio sobre el conocimiento y comprensión de profesores de bachillerato mexicano sobre la estadística	Una falta de comprensión sobre la estadística, demostrando la complejidad de los procesos cognitivos que se requieren para su enseñanza.

Estas investigaciones señalan que las construcciones que los estudiantes realizan sobre los estocásticos están relacionado con el discurso, manejo y tratamiento de los contenidos curriculares dependiente de las estrategias didácticas que profesor pone en escena para el desarrollo del curso; en pocas palabras, se reconoce que el conocimiento del profesor influye en la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2009; Llinares, 2013).

Para autores como Carballos y Ojeda (2006), Cardeñoso y Serrado (2006), Cuevas (2011), Vázquez y Alsina (2014) y Elizarráras (2014), el resultado de una falta de comprensión de los *estocásticos* radica en que los profesores brindan un enfoque determinista a la PyE y es distinguido cuando:

- Las clases de PyE se convierten en escenarios donde solo se aplica una serie de fórmulas y paso algorítmicos sin discusiones algunas sobre el significado de sus respuestas, ¿qué miden? ¿qué me dicen?
- No se discuten las nociones estocásticas como a aleatoriedad, de tal forma que los estudiantes puedan entender que en la realidad existe un mundo determinista donde es posible ejercer control sobre la variabilidad y otro que continuamente lidia con la incertidumbre; ya que en dichas condiciones la variabilidad no puede ser controlada sino que se aproxima a ella con la mayor certidumbre posible.
- No se hacen distinciones claras en las definiciones, como lo es variable aleatoria y no aleatoria, eventos independientes y excluyentes, promedio (moda, media y mediana), varianza y variabilidad, etc.

- No se hace énfasis en la incertidumbre, que es una idea fundamental que determina el campo de acción del saber estocástico.
- En el alumno no se promueve el ser crítico y reflexivo que surge por una exposición al pensamiento estocástico.

Aunado a ello, las investigaciones demuestran que la falta de conocimiento respecto a los estocástico generan una falta de autonomía en la práctica del profesor pues no son capaces de decidir que enseñar, como enseñar, elegir los libros adecuados, sugerir cambios curriculares (Espasandin, 2006; Inzunsa y Guzmán, 2011; Elizarrás, 2014) labor necesaria de la práctica del profesor de matemáticas (Dolores, 2013)

En términos de Juárez e Inzunsa (2014), un cambio en la enseñanza de estocásticos está determinado por un cambio en el conocimiento que tienen los profesores sobre los estocásticos. Para Cantoral (2001), Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010), Pinto (2010), Grossman, Wilson y Shulman (2011) y Llinares (2013) es necesario que los profesores fortalezcan los conocimientos que tienen respecto a los saberes que enseñan (Conocimiento del contenido, conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico, prácticas de referencia, conocimiento didáctico del contenido, etc.) a fin de contribuir a la mejora de su práctica; suponiendo que un mayor dominio de los saberes de la materia le permite ser capaz de tomar mejores consideraciones didácticas y pedagógicas que favorece una instrucción afectiva.

Sin embargo, aún no es claro la profundidad de los conocimientos que requieren los profesores PyE; lo que sí es claro es que la tendencia habitual para atender esta necesidad es brindar cursos cargados con altos contenidos de conocimientos en estocástico, al respecto Lavalle, Michel y Boche (2003) y Inzunsa y Guzmán (2011) señalan:

> *Un amplio conocimiento estadístico, aun cuando es esencial, no es suficiente para que los profesores puedan enseñar probabilidad.* (Inzunsa y Guzmán, 2011, p.71)

Por tanto, la solución al problema del conocimiento de los profesores no se encuentra con cursos cargados de tópicos de probabilidad y estadística, además que la mayoría de los profesores de matemáticas en su formación inicial o en algún momento de su formación han tomado cursos relacionados con los estocásticos y estos, parece que han sido insuficientes para su labor docente.

El trabajo realizado por Pinto (2010) se afirma que los profesores de matemáticas requieren desarrollar un conocimiento *especializado* que le permita desarrollar su labor docente. Esto requiere conocer aspectos específicos de la disciplina que enseña: 1) un conocimiento sobre su didáctica: cuáles son las propuestas que como docente me permitirán establecer un escenario donde los estocásticos adquieran significado, y 2) sobre el conocimiento de los estudiantes, qué saben, qué aprenden, y por qué. Tal conocimiento permita la ejecución de didácticas específicas que favorezcan el aprendizaje.

Por su parte, Espíndola (2014), en su trabajo sobre el conocimiento de los profesores de estadística, afirma que es necesario trasformar el tratamiento que ofrecen a la estadística en el aula mediante la inclusión de diferentes representaciones e interacciónales, siendo necesario que el profesor de estadística conozca aquello que enseña y tenga claridad sobre el alcance que se busca dentro del ámbito escolar.

Tal parece que los resultados de la investigación están señalando, que la preocupación que se tiene sobre el conocimiento del profesor de matemáticas sobre la PyE no radica en la cantidad de conocimiento que tienen de los tópicos abordados en la asignatura, sino de la profundidad de dicho conocimiento, es decir, ¿qué son? ¿Para qué sirven? ¿Cuáles son los contextos dónde surge? ¿Qué involucra dicho saber?, etc., a fin de poder definir aspectos claves como lo es la aleatoriedad, la probabilidad, la variabilidad y distinguir entre la realidad sitúa donde emergen los datos y el modelo matemático estocástico para inferir en dicha realidad (Azcárate, 2006, Da Ponte, 2011) En términos de Galicia (2006)

> *"se demanda la delimitación dé un campo de conocimientos que de sustento y autonomía a su ejercicio, así como legitimidad a su desempeño"* (p.100).

La suposición de Galicia (2006) sugiere que no todos los conocimientos que se le ofrecen al profesor son necesarios para mejorar su práctica profesional, en consecuencia es pertinente cuestionarse cuáles son esos conocimientos respecto a los estocásticos que el profesor debe apropiarse para ser autónomo en su práctica docente o bien fortalecer su práctica.

> *Este tipo de conocimiento,…, no puede provenir del simple conocimiento de la materia en su estructura formal, es necesario otro tipo de conocimiento sobre su materia, un conocimiento que reconocemos como profesionalizado,.., que le permita tomar decisiones sobre el qué y cómo enseñar a su alumnos en función de los diferentes niveles, contextos y situaciones. (Azcárate, 1998; p.138)*

Una propuesta para tratar con el *conocimiento profesional (conocimiento especializado)* es la que presenta Soto (2013) y Reyes-Gasperini y Cantoral (2012) que apuestan a la *resignificación de los saberes escolares* para mejor la práctica de los profesores de matemáticas. Para ello el profesor debe identificar, reflexionar y discutir sobre los saberes que enseña, en específico los *estocásticos*, a fin de que se apropie de dichos saberes y por ende, pueda apropiarse y normar su práctica. En este sentido no se descarta el conocimiento del profesor, sino la profundidad que tiene del mismo (Cabrera, 2014).

2.1 La relación del saber estocástico y el profesor de matemáticas

Debido a la naturaleza de los *estocásticos*, los profesores de PyE se encuentran interactuando con un tipo de pensamiento que no es común en la mayoría de las matemáticas que enseñan. Esta continua interacción con el saber desarrolla en el profesor de matemáticas una percepción sobre los estocásticos que se construye y reconstruye a medida que se enriquece la experiencia.

> *El conocimiento no es una simple representación de la realidad externa, sino el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende (sus estructuras cognitivas) y sus experiencias sensoriales. Además, el sujeto que aprende abandona la típica pasividad (cartesiana o lockiana), pues construye y estructura sus experiencias; de este modo, participa activamente en el proceso de aprendizaje y lo trasforma en una verdadera y propia construcción. Un objeto de conocimiento, al entrar en contacto con un sujeto que aprende, se modifica y reconstruye por los instrumentos cognitivos del sujeto.* (D´Amore, 2006, p.302)

La concepción D´Amore, (2006) plantea que el conocimiento de cualquier individuo, y en un caso concreto del conocimiento de los profesores de matemáticas, es resultado de una continua interacción del sujeto con el objeto matemático, de tal forma que el conocimiento del profesor construye y reconstruye de acuerdo a los escenarios y situaciones en los que desea incidir; dicha construcción temporal es la que delimita la práctica del profesor y tipifica el discurso que propone en el aula. En cuanto al saber, Cabrera (2014) dan cuenta de que el conocimiento del profesor se va generando con esas continuas interacciones donde construye, deconstruye y reconstruye continuamente los saberes matemáticos a fin de poder generar mejor entendimiento sobre ellos.

Reyes-Gasperini (2011) en su trabajo sobre el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, señala que las interacciones del profesor y los saberes matemáticos se han reducido a una concepción de las matemáticas como un conocimiento acabado y establecido, lo que le debe su carácter utilitario y no funcional del conocimiento, esto se debe a la forma en los saberes matemáticos son diseñados para incluirse en el sistema educativo. Algo similar sucede con los profesores de matemáticas y los estocásticos, al respecto Inzunsa y Guzmán (2011) mencionan:

> *…como consecuencia de su formación profesional y por la influencia de diversos libros de texto, tienen una orientación a enseñar la probabilidad en los niveles preuniversitarios enfocada en cálculos y fórmulas, asumiendo con ello que la probabilidad consiste en usar procedimientos para determinar probabilidades teóricas, en lugar de considerar aplicaciones del mundo real y la comprensión de conceptos, y fomentar el razonamiento probabilístico.* (p.75)

Por tanto, es imprescindible realizar investigación sobre la interacción profesor y saber matemático, permitiendo que se reflexione sobre ellos, sobre su construcción y hasta sus procesos de institucionalización y de inserción al ámbito escolar. En este sentido, la interacción con los estocásticos debería permitir al profesor de matemáticas responder sobre lo que son, porque se construyeron así y de qué forma se pueden difundir; cambiando el paradigma en las propuestas de los profesores de matemáticas y proponer conocimientos que sean funcionales, útiles y de fácil apropiación. En términos de Freire (1997) *Enseñar no es trasferir conocimientos, sino crear las posibilidades de su producción o de su construcción.* (p.24)

1.3. La pregunta de investigación y los objetivos de investigación

Con base en todo lo anterior, surge el interés de contribuir a mejor la práctica de los profesores de matemáticas que tienen a su cargo la asignatura de PyE o Matemáticas V en las instituciones de Educación Media superior en México. Perrenoud (2001) sugiere que para incidir en las prácticas debemos comenzar por *describir las condiciones y las dificultades del trabajo real de los docentes* bajo un contexto social, histórico y cultural determinado (Marchesí, 2009 y Lezama, 2009).

Asimismo, Lezama y Mariscal (2008) sugieren que la práctica del profesor debe ser entendida por dos interacciones: el saber matemático a enseñar, en este caso los estocásticos, y el estudiante, lo que brinda significado y pertinencia, tanto a la realidad misma del profesor como investigaciones sobre su práctica, en ese sentido nos cuestionamos:

> *¿Cuál es la propuesta didáctica sobre los estocásticos que el profesor de matemáticas diseña para su implementación en un aula de clases?*

La pregunta, implica centrarnos en los conocimientos que tienen los profesores sobre los estocásticos que son puestos en juego al momento de hacer una propuesta para su enseñanza en el aula, sea esta una secuencia didáctica, una situación, un proyecto, etc., en términos de Llinares (2011), las propuestas de los profesores permiten mirar los conocimientos que tienen sobre los saberes matemáticos:

> *La manera en que el profesor plantea las actividades a sus alumnos y gestiona su interacción en todo el grupo, y en pequeños equipos, muestra su conocimiento sobre las matemáticas. Este conocimiento le permite reconocer las potencialidades y limitaciones de las diferentes representaciones y recursos para enseñar determinadas ideas matemáticas, además de cómo deben secuenciarse los diferentes contenidos en la lección para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. El conocimiento de las matemáticas y su enseñanza se pone de manifiesto cuando el profesor decide modificar una secuencia de tareas previamente diseñadas a partir de las respuestas que dan los estudiantes.*
>
> *Los conocimientos de los profesores sobre las matemáticas también se manifiestan durante la gestión de la enseñanza y la orquestación de situaciones en las*

metodológicas como, por ejemplo, desarrollar discusiones de todo el grupo o realizar previamente sesiones de resolución de problemas en equipos (Llinares, 2011, p.128)

Sin embargo, tratar de mirar todas las propuestas que el profesor de matemáticas realiza no es tarea sencilla debido a la complejidad y naturaleza de los saberes estocástico, siendo necesario delimitar en un saber específico, el teorema de Bayes[2], que debido a su construcción, requiere de pensar en probabilidades *a priori* y *a posteriori*, lo que representa una dificultad, limitando la pregunta a:

¿*Cuál es la propuesta didáctica sobre el Teorema de Bayes que el profesor de matemáticas diseña para su implementación en el aula de clase*?

De tal forma que los objetivos de investigación están planeado entorno a estas interacciones del profesor con el saber estocástico.

a) Identificar los significados que el profesor le asocia al teorema de Bayes
b) Describir la propuesta didáctica que el profesor desarrolla basado en estos significados del teorema de Bayes.

De tal forma, que estamos interesados en la construcción del Teorema de Bayes que el profesor realiza, es decir, ¿qué es el Teorema de Bayes? ¿Para qué sirve? ¿Qué pensamiento se requiere? y por otro lado, ver si los significados que el profesor de matemáticas le asocia al teorema de Bayes es la que es la que norma sus propuestas.

1.4. Pertinencia de la Investigación

Hablar del profesor de matemáticas de NMS en México es ser consciente de las condiciones que presenta la población de profesores en servicio a nivel nacional, al respecto Conzuelo y Rueda (2010) presentan que:

63.7% posee estudios de licenciatura y están titulados en alguna disciplina relacionada con la asignatura que imparten, este grupo representa el porcentaje más alto de profesores, seguido de 13.56% con pasantía y 12.58% con estudios de posgrado. (p. 108)

---

[2] El teorema de Bayes es estudiado con mayor profundidad en el siguiente capítulo ya que constituye parte del marco de referencia; por ello, se limitó el discurso a solo una mención en este apartado.

Dicha estadística sugiere que un alto porcentaje de los profesores en servicio no son especialistas en el área. Como señalan Conzuelo y Rueda el 63.7% de estos profesor imparten asignaturas que de alguna forma están relacionadas con su formación inicial, dejando claro que la mayoría de los profesionales que están enseñando en las aulas de NMS no tienen una formación como profesores, sino que dentro de su formación adquieran algunos conocimientos que están relacionados con los contenidos de una asignatura propuesta en este nivel que para las instituciones lo hace apto como profesor.

De forma particular, Reyes-Gasparini (2011), Dolores (2013) y Dolores y Hernández (2013) destacan la diversidad de estudios y carreras con los que cuentan los profesores de matemáticas, siendo carreras afines a la matemática (actuarios, ingenieros, matemáticos, etc.) y en algunos casos sin afinidad alguna. Dichos profesionales se hicieron profesores de matemáticas en la práctica o bien por las oportunidades laborales a las cuales se vieron sujetas, lo que conlleva a una falta de formación didáctica o pedagógica para la enseñanza de las matemáticas.

Aunado a ello, está el hecho de que la mayoría de los profesores de matemáticas se ve en la necesidad de impartir múltiples asignaturas del área, siendo común encontrar a un profesor que imparta algebra, geometría plana y calculo en el mismo periodos semestrales, o posiblemente a un mismo profesor que debido a la naturaleza de su formación inicial imparte asignaturas tanto del área de matemáticas como de las otras áreas de conocimiento.

De forma particular, la investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje de los estocásticos han señalado que la formación docente contribuye a las dificultades para el desarrollo del pensamiento estocástico, ya que en su formación inicial o a lo largo de su desempeño docente no ha sido forma en estocástico y por ende, no permite que los estudiantes que participan en un curso de PyE desarrollen un pensamiento estocástico (Azcárate, 2006; Espasandin, 2004; Laville, Micheli, Boché y Argentina, 2003).

Lo anterior, sugiere puntualizar dos aspectos que se presentan en la práctica del profesor de matemáticas de NMS:

- El profesor no es un especialista en PyE, siendo necesario pensar en el desarrollo profesional a fin de fortalecer su práctica. De igual forma, es posible que el profesor sea un “experto” en un área en específico debido a que ha desarrollado e impartido un mismo curso una y otra vez, sin embargo Zeichner (1993) sugiere que esos conocimientos, tratamientos y formas de enseñanza no lo hacen un especialista en el área, ya que existen consideraciones respecto a los saberes matemáticos que están fuera de su alcance y de su práctica.

- La influencia de su formación inicial en su enseñanza pues sus creencias y concepciones respecto a los saberes matemáticos influyen en la forma en que difunde dichos “saberes”, el tratamiento que le otorga, y los objetivos que se propone alcanzar en un curso. (Llinare, 2011).

Por tanto, un acercamiento más puntual a esta realidad del profesorado nos da cuenta de las necesidades a las cuales se debe atender con la finalidad de contribuyen en el desarrollo profesional de los profesores, realizar mejores propuestas didácticas para la enseñanza de estocásticos o bien proponer mecanismo para el fortalecimiento de la práctica del profesorado.

Capítulo 2.
Marco de Referencia

Introducción

La razón por la que nos interesamos en el conocimiento del profesor de PyE, es debido a que la propuesta sobre la construcción de los estocásticos dentro del aula dependerá exclusivamente de los conocimientos que tenga sobre los saberes matemáticos, como señala Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) al citar a Ma (1999):

> *los profesores no necesitan un conocimiento probabilístico abstracto (por ejemplo, la teoría de la medida), si requieren una comprensión profunda de la probabilidad básica, de las interconexiones y relaciones entre los diferentes conceptos probabilísticos y sus aplicaciones, y otros conocimientos no estrictamente matemáticos necesarios para organizar la enseñanza y llevarla a la práctica*

Un supuesto, es que parte de esta construcción profunda que sugiere Díaz, Contreras, Batanero y Roa, se lleva a cabo en los diferentes momentos en que el profesor interactúa con el saber matemático y debido a estas interacción se conforma significados sobre el objeto involucrado que ponen en marcha a la hora de planear para la enseñanza (Figueroa, Baccelli, Prieto y Moler, 2013),

Para estudiar el conocimiento que el profesor construye para la enseñanza, se presenta una postura respecto al denominado *Conocimiento Didáctico del Contenido* (CDC), conocimiento que se enfoca en la enseñanza y se aborda en esta sección de manera profunda; se añade un apartado respecto a los *estocásticos* y sus aspectos epistemológicos y didácticos que nos dan cuenta de los significados asociados a este saber

2.1 El conocimiento Didáctico del Contenido

Según Pinto (2010) y Espíndola (2014) la caracterización del Conocimiento Didáctico del Contenido, o en sus siglas en español CDC, es atribuido a los trabajos realizados por Lee Shulman, a saber, Those who undersatand: Knowledge groeth in the teaching (1986) y Knowledge and teaching: foundations of new reform (1987), que dan origen a su corriente de investigación "*Conocimiento base para la enseñanza*". Éste describe que el profesor debe incluir al menos siete categorías de conocimiento:

conocimiento didáctico del contenido, conocimientos didáctico general, conocimiento curricular, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimiento de los contextos educativos y el conocimiento de las finalidades educativas, los valores educativos y los objetivos.

A partir de los trabajos de Shulman (1987) diferentes autores fueron robusteciendo la noción del conocimiento *base para la enseñanza* y considerando en todo momento el CDC como parte fundamental de los modelos. En el trabajo realizado por Espíndola[3] (2013) se presenta una revisión bibliográfica de los diferentes modelos, misma que se resume en la Tabla 3 mostrando la pertinencia de CDC y sus diferentes interacciones con los otros conocimientos, considerándose como fundamental en lo que se refiere al conocimiento profesional del profesor.

Tabla 3.
Modelos del conocimiento para la enseñanza y su relación con el CDC, basado de la revisión de Espíndola (2013)

Autor	Concepción del CDC
Grossman (1990)	Esta concepción hace notar que el CDC es una construcción de una interacción continua y reciproca con las otras formas de conocimiento. Para Grossman (1990), el CDC debe incluir el conocimiento de la comprensión del estudiante, conocimiento curricular, conocimiento de las estrategias instrucciones.
Magnusson, Krajacik y Borko (1999)	Para los autores el CDC es construido de la interacción del conocimiento de la materia, el conocimiento pedagógico y el conocimiento del contexto. El modelo incorpora cinco componentes al CDC: la orientaciones hacia la enseñanza de las ciencias, los conocimiento y creencias sobre el currículo de las ciencias, los conocimientos y las creencias acerca de la evaluación en las ciencias, los conocimientos de los estudiantes y creencias sobre la comprensión de temas científicos específicos y los conocimientos y las creencias acerca de las estrategias de instrucción para la enseñanza de las ciencias. La contribución de este modelo es la orientación del conocimiento hacia las ciencias.

[3] Para mayor profundidad sobre los modelos ver el trabajo de Espíndola (2013), *Conocimiento de las representaciones instrucciones de un profesor de estadística en la carrera de Educación*. Tesis no publicada.

Park y Oliver (2008)	Agregan un componente más al CDC, denominado eficacia del profesor, que es la puesta en acción de conocimiento complejo del profesor (dado por la integración de las otras componentes) ante contextos específicos y dominios específico

Nota: La información presentada en la tabla resume lo contenidos en el Capítulo II: Revisión de literatura de la Tesis de Espíndola (2013)

A todo ello ¿por qué es pertinente profundizar en el CDC?, Para Grosman, Wilson y Shulman (2005), Shulman (2005), Pinto y González (2008), y Cabrera (2014), este conocimiento es lo que marca la diferencia entre ser matemático (refiriéndose a ésta como ciencia) y ser profesor de matemáticas, pues no solo es requerido un conocimiento respecto a la materia en sí, sino agregar aquellos conocimientos necesarios en la forma de construir, difundir y negociar los objetos matemáticos dentro del contexto del aula, lo que hace que sea propio de la profesión de profesor. En términos de Shulman (1986, citado en Pinto y Gónzales, 2008), el CDC se define y caracteriza de la siguiente manera:

> *Las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros… incluye un conocimiento (o comprensión) de lo que hace que el aprendizaje de un tópico específico sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y experiencias traen consigo al aprender estos tópicos y lecciones frecuentemente enseñadas con anterioridad.* (p.9)

En forma simple, el CDC es la forma en que el profesor, en este caso de matemáticas, representa y formula un saber matemático para hacerlo comprensible a otros. Para Pinto y González (2008) este CDC, se trata de las construcciones de las estrategias de los profesores para la enseñanza de un tópico específico lo que conlleva a que los profesos construyan y reconstruyan un saber matemático bajo un contexto específico de enseñanza.

Para Cabrera (2014), la pertinencia de enfocar las investigaciones en el CDC, es porque este provee de un marco de referencia para entender el conocimiento del profesor y su práctica en el aula, pues en cierta forma, nos permite mirar las construcciones que hace el profesor de los saberes matemático para la enseñanza, sin despegarla de su realidad, el alumno y el aula.

2.2. Las categorías del CDC

Cuando se habla del CDC, se hace referencia de aquellas ideas, significados, nociones, formas de representación, entre otras, que el profesor matemáticas considera para hacer enseñable un tópico curricular. Shulman (1986), Pinto y González (2008), Pinto (2010) y Cabrera (2014) señalan que este conocimiento tiene tres componentes: el conocimiento del contenido por enseñar, el conocimiento de la didáctica específica y el conocimiento del estudiante. Al respecto de estos tres componentes Cabrera (2014) señala:

> *Estos elementos interactúan para lograr una amalgama entre sí, es decir, no es mera conjunción de cada uno de estos, sino que existe una transformación del conocimiento del contenido a un contenido enseñable.* (p.26)

A continuación en la Tabla 4, se describen de forma general las características conceptuales de cada componente según Pinto y González (2008) y Pinto (2010)

Tabla 4.
Características conceptuales de los componentes del CDC según Pinto y González (2008) y Pinto (2010)

Componente	Característica conceptual
Conocimiento del contenido a enseñar	Se refiere a la cantidad y organización de conocimiento que el profesor debe de tener sobre los contenidos a enseñar, es decir, en conocer su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, característica, la transversalidad con otros contenidos, etc.; lo que implica que el profesor debe conocer profundamente cada tópico del currículo propuesto.
Conocimiento dela didáctica específica	Este componente surge de asumir que el conocimiento y comprensión de los contenidos a enseñar no es suficiente, siendo necesario conocer una didáctica específica sobre los contenidos; conocer lo que parece ser fácil o difícil para los estudiantes, las propuestas que se hacen para la enseñanza de cierto tópico, entre otras cosas. Para ello es necesario conjugar dos elementos a) el conocimiento del profesor acerca de las representaciones de la materia y b) el conocimiento del profesor de las estrategias instrucciones asociadas al contenido específico que enseña.

Conocimiento del estudiante	Si bien, los conocimiento sobre la enseñanza y la didáctica específica no tienen razón si no se considera los procesos cognitivos que el estudiante realiza al momento de la instrucción. Por tanto, el profesor debe conocer aquellas dificultades conceptuales que se presentan en los estudiantes al momento de enfrentarse a un tópico específico, es decir, conocer el desarrollo y evolución cognitiva que requiere un estudiante para aprehender un tópico en específico

La Tabla 3 hace notorio la complejidad de las componentes propuestas por Shulman (1986) para el CDC, al respecto, el estudio realizado por Pinto (2010) brinda un ejemplo de investigaciones que contribuyen a inferir sobre una componente en específico para robustecer el modelo y dar cuenta de la complejidad de la misma.

Asimismo, el modelo permite su inclusión desde diferentes líneas de investigación y sobre diferentes contenidos disciplinares (física, matemáticas, biología, etc.) y no sólo ello, sino que hace uso de los diferentes resultados que brindan la investigación en torno a los contenidos, a la didáctica de los contenidos y los procesos cognitivos de los estudiantes ante un tópico en específico, convirtiéndose en referentes para entender como construye el profesor su conocimiento. En términos de Pinto (2010) el CDC

> *Es un constructo constituido por lo que los profesores conocen, lo que los profesores hacen y las razones por las que los profesores actúan.* (p.62)

En particular, debido a la naturaleza de la investigación y los objetivos propuestos, se pretende incidir en dos componentes en particular: *conocimiento del contenido a enseñar* y *conocimiento de la didáctica específica* a fin de entender al profesor de PyE bajo un tópico en específico el Teorema de Bayes

2.2.1. Conocimiento del contenido matemático a enseñar

Esta categoría se establece bajo el supuesto de que todo profesor debe tener un nivel mínimo de conocimiento respecto al contenido que enseña, producto del contacto con el saber en cualquier momento de su desarrollo académico o bien, en su formación inicial como profesor(o profesional en el caso particular de México). Para Shulman (1986), citado en Pinto (2010), esta categoría se caracteriza de la siguiente manera:

> *El profesor necesita no únicamente conocer o comprender qué, sino que además saber por qué esto es así sobre qué supuestos estas justificaciones pueden ser ciertas y bajo qué circunstancias nuestras creencias en esas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas* (p.19)

Lo que Shulman sugiere es que el profesor debe tener un conocimiento sobre la naturaleza de los saberes matemáticos que enseña para sustentante las decisiones que toma respecto a su enseñanza y sobre los contextos que propone para su aprendizaje. Para Pinto (2010) existen tres grupos de conocimientos que conforman el conocimiento del contenido a enseñar

- Conocimiento sobre la actividad matemática general: *comprende el estudio del surgimiento de la matemática como disciplina y como objeto de estudio en la escuela, su evolución, sus conceptos, principios, hechos y teorías, las posturas filosóficas en que se sustenta, y los valores éticos, morales y estéticos que vislumbra.*
- Conocimiento por tópicos específicos matemáticos: *considera dominios de conocimientos a estudiar por cada tópico específico de las matemáticas* (concepto matemático, atributos del objeto, diferentes representaciones, relación con otros conceptos, conocimiento conceptual y procedimental del objeto, subtópicos, etc.).
- Conocimiento sobre el currículo matemático: *está formado por los elementos del contenido vinculado con el currículo escolar, como son el rol e importancia del tópico en matemáticas, su relación con otras disciplinas, el programa matemático escolar, los problemas típicos a enfrentar y los antecedentes académicos vinculados con otros contenidos matemáticos* (significado y relevancia de aprender ese objeto, ideas importantes del objeto, herramientas procedimentales y conceptuales previas, etc.).

En este sentido, el profesor debe tener un conocimiento amplio sobre el objeto matemático que enseña, desde comprender su integración en las matemáticas hasta su trasformación en el ámbito escolar. Por su Cabrera (2014), puntualiza que el conocimiento del profesor de matemáticas debe ser aún más profundo que sólo limitarse a conocer al objeto desde lo escolar; debe las condiciones y prácticas que permitan su construcción, siendo necesario definir su dominio del contenido matemático a una exigencia mayor:

> *El dominio matemático obliga a explicar la matemática desde la matemática misma y, en consecuencia, soslaya a lo humano y a los sentidos de todo el saber matemático. Se trata, entonces, de identificar o construir aquellos marcos o prácticas de referencia en los que se manifieste el uso del conocimiento matemático; es decir, donde sucede su funcionamiento y su forma orgánica en la situación específica. Ahí aparecerán elementos que no corresponden a las justificaciones razonadas que norman alguna estructura lógica, sino que atañen a la utilidad del participante en la situación específica. Es por eso que no nos importa el estudio del conocimiento matemático, sino el estudio de la función del conocimiento matemático.* (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010, p. 189)

Esto último, propone que el dominio del profesor sobre los estocásticos es tal que genere contextos dentro del aula para que los alumnos se apropien de los saberes; no sólo que conozcan la forma utilitaria para aplicar los conocimientos en la resolución de problemas escolar, mejorar los resultados de las pruebas estandarizadas o bien obtener mejores notas, pues esto representaría un fracaso educativo; sino que le sea funcional a tal grado que él pueda reconocer su uso en contextos donde el conocimiento pueda ser aplicable. Aunque esta postura pareciese muy exigente, es necesario reconocerla como parte del conocimiento del contenido a enseñar que el profesor requiere para su práctica profesional.

2.2.2 Conocimiento de la didáctica matemática (CDM)

Este componente surge de suponer que un conocimiento de las matemáticas no lo es todo en la labor profesional del profesor, sino que este debe conocer las formas en que este conocimiento puede ser llevado al aula, los momentos apropiados, las formas de relacionarnos, las dificultades, las secuencias didácticas más apropiadas, las representaciones y las actividades que mejoraran el adquirir conocimiento, entre otras, que faciliten a los alumnos aprehender matemáticas.

Para Llinares (1996), Llinares, Valls, Roig (2008) y Llinares (2014), el CDM está relacionado con lo que el profesor hace con el conocimiento de la matemática en su práctica, debido a que el objeto de la profesión es justamente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y su objetivo primordial es propiciar el aprendizaje (Dolores, 2013). Por tanto, esta componente sitúa al conocimiento del profesor en un contexto en particular "la enseñanza" lo que hace imposible estudiar el conocimiento de la didáctica matemática sin mirar el conocimiento del contenido matemático a enseñar, ya que uno hace referencia al otro y viceversa.

Para ser específicos, Shulman (1986), citado en Pinto (2010), define el conocimiento de la didáctica específica cómo:

> *Las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas – en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros* (p.25)

Debido a la forma en que Shulman conceptualiza al *conocimiento de la didáctica específica* es que el nombre ha derivado al *conocimiento de las representaciones instrucciones o conocimiento de las estrategias y representaciones interacciónales*. En la revisión realizada en Pinto (2010), se reconoce que hay al menos dos tipos de representaciones instrucciones: 1) las que son creadas por el profesor de una reflexión sobre la matemática y su enseñanza (interna) y, 2) aquellas que se derivan de los materiales curriculares (externas) como son los libros, la computadora, película, cursos, talleres, entre otros. Análogo al *conocimiento del contenido matemático a enseñar*, Pinto sugiere que existen tres categorías de conocimiento que integran el CDM:

- Conocimiento sobre las representaciones instruccionales: *comprende el estudio, comprensión, origen de las representaciones instruccionales de un tópico específico, así como los elementos para su desarrollo, evaluación, selección e implementación en el aula*
- Conocimientos de los materiales curriculares: *es el estudio y caracterización del amplio conjunto de materiales curriculares diseñados a partir de la investigación en educación matemática*
- Conocimiento sobre el currículo matemático: *comprende aspectos relacionados con la actividad del diseño, planificación, implementación y*

> *evaluación del programa matemático en el aula, y su relación con el contenido y la didáctica específica*

2.3 El saber matemático denominado Teorema de Bayes

Con la finalidad de contribuir al entendimiento del CDC en los profesores de PyE de bachillerato, se realizó un análisis epistemológico y didáctico sobre el Teorema de Bayes. Los aspectos epistemológicos y didácticos nos brindan una herramienta para el análisis sobre los conocimientos que construyen los profesores para la enseñanza de los estocásticos, que como se menciona en el Capítulo I, es el interés primordial de la investigación.

Por otro lado, la relevancia y pertenencia de profundizar sobre el Teorema de Bayes se hace prescindible por dos fenómenos: *la trasposición didáctica* y la *exclusión provocada el discurso matemático escolar* (dME), que delimitan las construcciones de los e*stocásticos* en el contexto escolar.

En cuando a la trasposición didáctica, Chevallard (1998) menciona que este fenómeno se da de la siguiente manera:

> *Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de trasformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que trasforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto enseñanza, es denominado la trasposición didáctica.* (p. 45)

Para Chevallard, la mayoría de los contenidos vertidos en un currículo de las asignaturas de matemáticas, hasta las mismas asignaturas, han sufrido una *trasposición didáctica*, que lo hace funcional para el ámbito escolar y le obliga a ocupar un lugar específico en el currículo. Cuando esto sucede, de que un objeto matemático (saber) se convierte en un objeto de enseñar, pierde en las trasformaciones ciertas prácticas y significados que lo constituyen como tal; por tanto, son aptos para producir conocimiento pero no para generar conocimiento que pueda ser usado (*saber*). Así, que si se desea producir saber en lugar de mero conocimiento, se hace prescindible lidiar con los objetos matemáticos y resolver el problema de su trasposición didáctica; situación que tanto profesores como instituciones educativas son inconcientes:

> *El docente en su clase, el que elabora los programas, el que hace los manuales, cada uno en su ámbito, instituye una norma didáctica que tiende a construir un objeto de enseñanza como distinto al que da lugar. De este modo, ejercen su normatividad, sin asumir la responsabilidad- epistemológica- de este poder creador de normas (Chevallard, 1978, citado en Chevarllar 1998, p. 51-52)*

Esta forma, asimilación de la norma o institucionalización del saber matemático, ejerce cierto poder sobre los individuos, al respecto Soto (2013) afirma que el fracaso de en las matemáticas se debe a este saber escolar.

> *… no es el sujeto que aprende quien "fracasa" en su tarea, ni el profesor con sus metodologías de enseñanza, sino son las propias características del dME las que excluyen a los sujetos de la construcción del conocimiento matemático* (p.118)

Este saber escolar que viven en aula de matemáticas ejercen una imposición, como decir "porque yo lo digo y punto", presentan a los objetos de saber cómo algo terminado, inamovible, lineales y preexistente, que como menciona Soto *es un discursos hegemónico, carente de marcos de referencia que nos ayuden a dar nuestros significados a las matemáticas* (p. 118-119). Por tanto, un profesor que no ha reflexionado sobre la trasposición didáctica y sobre el poder del dME, solo ofrecerá herramientas, procedimientos, argumentos, situaciones que no permitan adquirir un conocimiento que sea funcional sino más bien utilitario.

2.3.1 Las problemáticas entorno al Teorema de Bayes

La incorporación del teorema de Bayes en contextos escolares ha tenido fuertes implicaciones en cuando a su enseñanza, algunas veces limitado a una explicación más determinista o bien frecuentista de la probabilidad.

Para Díaz, Ortiz y Serrano (2007) la dificultad en el aprendizaje y la enseñanza del teorema de Bayes se debe a que su aplicación requiere que los estudiantes dominen otros contenidos probabilístico que evidentemente favorecen a la generación de errores. En su estudio se obtuvieron que un alto porcentaje de estudiantes no podían identificar correctamente los sucesos y sus probabilidades, no realizaba correctamente la partición y subparticion del espacio maestral, y sobre todo no logran establecer la diferencia entre la condicionada directa y la condicionada inversa, en consecuencia resumen:

> *El teorema de Bayes se presente, en consecuencia, como un objeto complejo, cuya comprensión involucra toda un serie de conceptos y propiedades previas como los de probabilidad simple compuesta y condicional, la partición y completos, axioma de unión y regla del producto*. (p. 206)

Zapata y Quintero (2009) señalan que la problemática se debe al razonamiento intuitivo o de sentido común en los estudiantes a la hora de enfrentarse a problemas que requieren el teorema de Bayes, este pensamiento es persistente a pesar de la instrucción

En Díaz y de la Fuente (2006) se hace una investigación exploratoria tomando como hipótesis los resultados de investigaciones anteriores, que señalan la facilidad de los estudiantes en la resolución de problemas bayesianos que involucran frecuencias absolutas y dificultades cuando los problemas brindan información en forma de frecuencias relativas, porcentajes o formato probabilístico. El resultado de la investigación señalo que las problemáticas en la resolución de problemas bayesianos es independiente del tipo de información que se les presentan a los estudiantes el problema y se debe, en mayor medida, a la instrucción que brinda el profesor de matemáticas respecto al teorema de Bayes.

Las investigaciones anteriores dan un panorama general sobre las problemáticas entorno a la enseñanza del teorema de Bayes, enfatizando que el problema en sí es el saber matemático y el tipo de pensamiento que se requiere. Mejorar la instrucción requiere conocer qué es el teorema de Bayes, cuáles son los significados asociados, y por qué se presenta como complejo, siendo importante reflexionar sobre el aspecto epistemológico y didáctico de dicho objeto.

2.3.1.1 Aspecto epistemológico del Teorema de Bayes

El teorema de la probabilidad inversa, fue enunciado por primera vez alrededor de 1764 por Thomas Bayes y redescubierto por Pierre Simon de Laplace en 1774.Ambos tenían la firma intensión de resolver el problema propuesto por Bernoulli y de Moviere, el problema de la inferencia deductiva, que consiste en que dado un evento determinar la probabilidad de la causa o causas que han generado partiendo de ciertas hipótesis que se han construido sobre las causas. (Bayes y Price, 1763; Girón, 1997; Gómez, 2001; Landro y González, 2002).

Para Morgan (1838, citado en Silva, Benavides y Almenara, 2002) la forma de pensamiento que se establecía en el teorema de Bayes era complejo para su tiempo, a la letra escribe:

> *Había también otra circunstancia que era válida para los primeros investigadores; esto es, no haber considerado, o al menos no haber descubierto, el método de razonamiento que va de la ocurrencia de un evento a la probabilidad de su causa. Dada una hipótesis que entraña la necesidad de una u otra consecuencia de ella (dentro de cierto conjunto no muy grande de ellas), ellos podían determinar la probabilidad de que ocurriera cualquiera de estas consecuencias. Pero dado que un evento ocurrió, lo cuál puede ser explicado por diversas causas o ser explicado por alguna de las diferentes hipótesis, ellos no podían inferir la probabilidad con la cual el acontecimiento que estaban observando pudiera ser explicado por dichas hipótesis.* (p.112)

Tanto Bayes como Laplace (ver Tabla 5), fueron capaces de establecer una forma de pensamiento diferente a la que la probabilidad clásica proponía en ese momento, afirmando que la experiencia adquirida a partir de la repetición de un evento que se postula como una hipótesis acerca de su comportamiento futuro (Landro y González, 2002). Estas experiencias adquiridas mediante la observación se establecen como probabilidad *a priori*, y la hipótesis, que en el momento no es observable, luego de ser comprobada se establece como una probabilidad *a posteriori*.

Tabla 5.
Proposiciones del teorema de la probabilidad inversa por Bayes y Laplace tomado de Bayes y Price (1763), Girón (1997), González (1992) y Girón (2001)

Bayes	Laplace
Dado el número de veces en las que un suceso ha ocurrido y no ha ocurrido: se requiere el azar de la probabilidad de que ocurra en una sola tirada esté comprometida entre dos grandes probabilidades arbitrarias (conocidas)	*Si un suceso se puede producir un número de causas diferentes, entonces las probabilidades de esas causas dado el suceso son a cada una como las probabilidades del suceso dadas las causas, y la probabilidad existente de cada una de ellas es igual a la probabilidad del suceso*

$$P(a\|b) = \frac{P(b\|a)P(a)}{P(b)}$$	*dada esa causa, dividida por la suma de todas las probabilidades del suceso dada cada una de las causas.* (Laplace, 1774, 623)
La probabilidad de cualquier suceso es el cociente entre el valor en el que uno espera tendiendo de la ocurrencia del suceso que debe ser calculado, y el valor de la cosa esperada una vez que está ha ocurrido.	$$P(A_i\|B) = \frac{P(B\|A_i)P(A_i)}{\sum_j P\left(B\middle\|A_j\right)P\left(A_j\right)}$$

Para Bayes, $a|b$ ($a\ posteriori$) es una hipótesis que ha de ser evaluada en términos de los datos empíricos b ($a\ priori$), es decir, que la hipótesis está condicionada a los datos, siendo necesario considerar (Girón, 2001):

1. La existencia del fracaso o éxito de un evento $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
2. Para definir la probabilidad $P(A)$ es necesario fijar un valor N arbitrario de observaciones donde a es el número de éxitos en lo que se da el suceso $P(A) = {}^{a}/_{N}$

Girón (1994) comenta que en un principio Bayes trabaja con la probabilidad inversa, dejando inconclusa muchas justificaciones que en los posteriores trabajos de Laplace quedan justificado y no solo ello, sino que generalizó el teorema de Bayes. De forma independiente, Laplace hace un énfasis en el hecho de que la causa (*a priori*) puede estar conformado por diversas causas que son equiprobables, independientes, excluyentes y complementarios; en términos probabilísticos se dice que:

1. $P(A_i) = \frac{1}{n}$ donde las $i = 1,2,3 \dots n$
2. $P\left(A_i\middle|A_j\right) = P(A_i)$
3. $P\left(A_i \cap A_j\right) = 0$
4. $\sum P(A_i) = 1$

Para Martínez (1993), la idea básica que propone Laplace, es reducir la probabilidad de las causas a una distribución inicial uniforme y conseguir el teorema de Bayes como un tipo especial de búsqueda de probabilidad, es decir, si un evento se debe a una causa determinada, entonces su probabilidad resulta de estimar la probabilidad de la condicional de ese evento bajo la causa específica, divida entre la suma de todas las condicionales que surgen al condicionar ese evento a las *n* causas establecidas. Cabe señalar que la crítica más fuerte al desarrollo de Laplace es debido a la utilización de probabilidades *a priori* siempre equiprobables, aunque en un desarrollo posterior aplica el mismo teorema a no uniformes, haciendo mención de la necesidad de este tipo de probabilidades pero que pudieran ser reducidas a su caso uniforme (Girón, 1994).

Los trabajos de Bayes y Laplace establecen los fundamentos matemáticos que explican la probabilidad inversa o bien la inferencia deductiva dentro del pensamiento estocástico siendo necesario delimitar algunas condiciones que surgen de las probabilidades *a priori* y *a posteriori* (según el modelo de Laplace), y que para el trabajo se ha denominado definición operacional del teorema de Bayes

1. La probabilidad *a posteriori*, es una probabilidad condicionada por tanto cumple con las normas asignadas al cálculo de este tipo de probabilidades
2. Los eventos A_i se les asignado una probabilidad que se denomina probabilidades *a priori*
3. Los eventos A_i son exhaustivas del espacio muestra
4. Los eventos A_i son independientes y mutuamente excluyentes
5. Los A_i y B no son simétricos
6. B no es un evento observable

Sin duda, la mayor contribución del teorema de Bayes es el planteamiento de la probabilidad inversa, ya que a partir de ella se construye un enfoque contrario de probabilidad que se mantenía en ese tiempo y que se ha denominado el enfoque *subjetivo* de la probabilidad:

> *…es utilizado para medir la opinión sobre la ocurrencia de un suceso, parte de suponer unas probabilidades iniciales o a priori que se combinan con cierta información obtenida a partir de los datos muéstrales y que nos llevan a determinar una nueva probabilidad final a posteriori* (Gómez, 1999, p.16).

En esencia, la probabilidad inversa propone un método para evaluar información nueva y revalorar las estimaciones de los hechos con las que contamos (*a priori*) hasta antes de encontrarnos con esta nueva información (Levin y Rubin, 2004). Para Díaz, Ortiz y Serrano (2007), este es la idea germinal asociada al Teorema de Bayes, *Bayes es un cambio en el grado de creencias sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información*.

En efecto, lo que hay detrás del teorema de Bayes, es un cambio de creencias respecto a la o las causas de un evento, estas creencias están basadas en información empírica. Cuando evaluamos las causas condicionándolo al evento sucedido, se realiza una hipótesis previa, la cual después de ser valorada, evidentemente provocará un cambio de creencias con respecto a las causas que originan dicho evento (ver figura 1*)*.

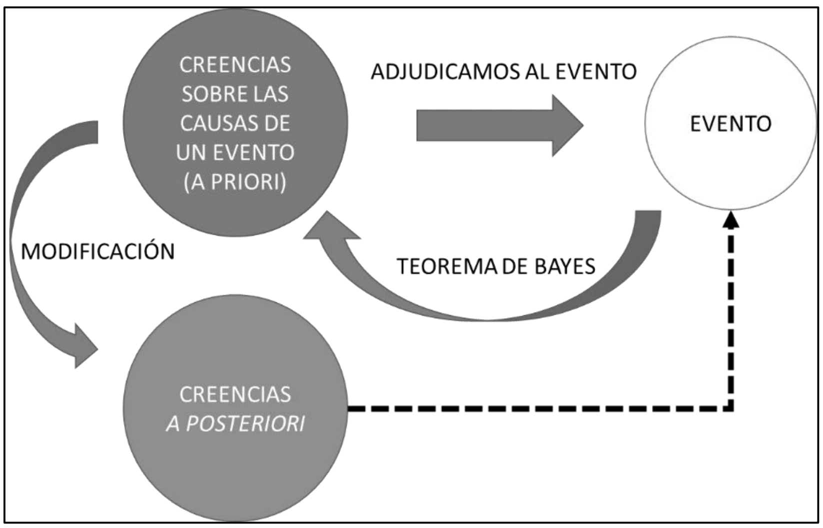

Figura 1. Teorema de Bayes. Enfoque subjetivista la probabilidad.

Como es de notar, el teorema de Bayes no trata de aceptar o rechazar la hipótesis previa, sino más bien influir en la creencias de los individuos, es decir, modificar el *grado de creencias* de los individuos (González, 1992). Para Alonso y Tubau (2002) el teorema de Bayes, *permite observar el grado de racionalidad con la que una persona cambia sus creencias cuando consigue nueva información*, este cambio de creencias debería ayudarlo a tomar una decisión de cómo actuar ante tal evento.

Estas creencias previas es por lo que se le denomina *enfoque subjetivo* de la probabilidad, y lo que causa mayor controversia dentro de los pensadores estocásticos, ya que existe la idea (también subjetiva) de que aquellos que hacen uso de estén enfoque pueden ajustar la información de tal forma que la probabilidad *a posteriori* se vea afectada a su favor.

Al respecto Landro y González (2012) señalan que debemos entender esta subjetividad como una *subjetividad racional*, no como un grado de creencia personal:

> *Solo el teorema de Bayes era capaz de resolver el problema de la habitual vaguedad de las contribuciones del sentido común a partir de un número finito de observaciones, de determinar el grado con que las observaciones confirmaban una conjetura dada y, en consecuencia proporcionar una medida de la capacidad de un razonamiento inductivo.* (p.49)

Esta componente subjetiva, parte de que individuo que plantea una hipótesis, comunica su grado de confianza y por consiguiente la medida en que no confía en ella ylos plantea en términos de la distribución de probabilidad. Este grado de confianza se genera porque el individuo tiene un conocimiento que no surge de una mera creencia o suposición caprichosa o arbitraria, sino que construye mediante la incorporación de las experiencias, experimentos y datos previos dentro de las conclusiones (Silva y Muñoz, 2000).

Este conocimiento reduce la ignorancia y evidencia el estado de conocimiento que un individuo tiene respecto a un fenómeno, lo que remarca la incertidumbre dentro del problema y que es esencial en todo pensamiento estocástico (Ver figura 2). De igual forma, esta racionalidad comunica que nadie se acerca sin prejuicios a un fenómenos, sino que todos tenemos un grado de subjetividad que está presente en todo proceso de inferencia: *dicho de otro modo todos tenemos un visión a priori de la realidad* (Silva y Muñoz, 2000, p. 486).

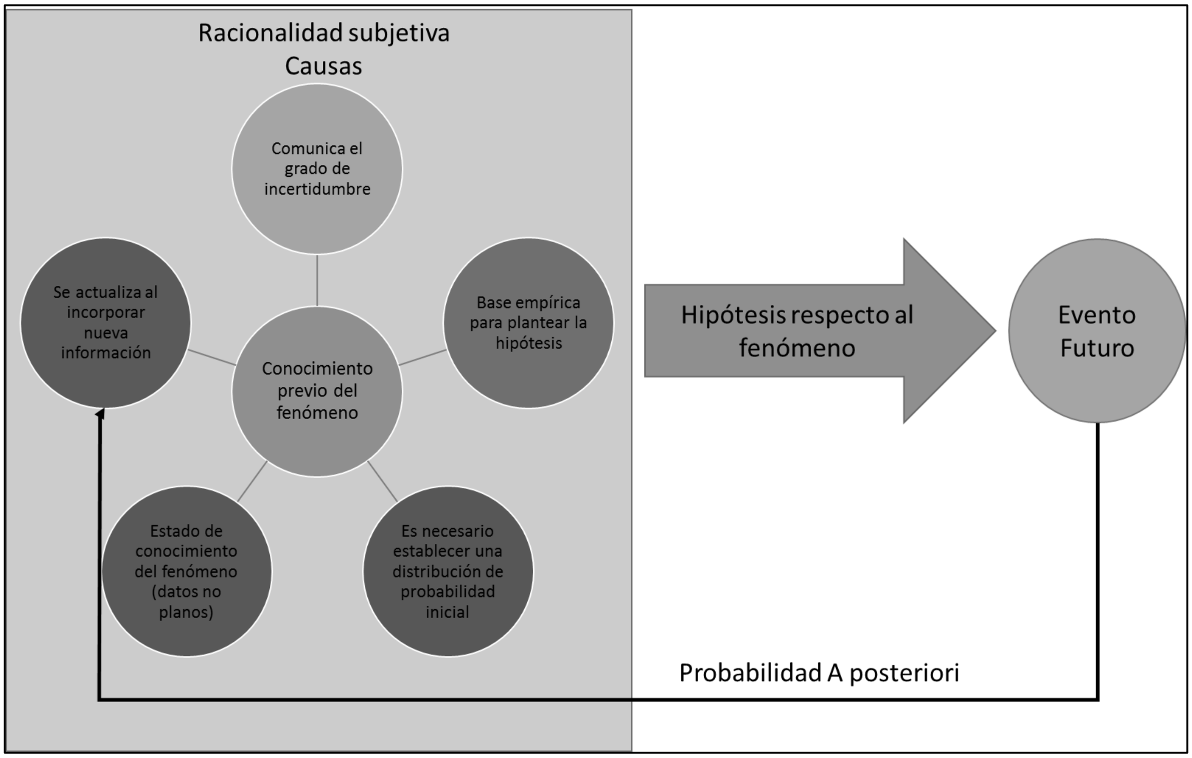

Figura 2. Sobre el conocimiento previo del fenómeno en el enfoque de inferencia deductiva o bayesiana

Por último, algo a considerar en el Teorema de Bayes, es que aunque hay una hipótesis a priori de las causas, existe una componente que depende exclusivamente de los datos "la verosimilitud" y la conjunción de ambas, es la que genera la probabilidad a posteriori, esta objetividad que proporciona la verosimilitud es la que modifica la convicción que se tiene respecto al fenómeno y no lo subjetivo (Silva y Muñoz, 2000; Gómez, 2001; Alonso Rodríguez, 2008)

> *El teorema de Bayes es un procedimiento que permite a los tomadores de decisiones combinar la teoría de probabilidad clásica con su mejor sentido de intuición acerca de lo que es posible que ocurra… En todas las situaciones en las que se use el teorema de Bayes, primero utilice todos los datos históricos disponibles y después (y sólo entonces) agregué su propio juicio intuitivo al proceso. La intuición usada para hacer predicciones acerca de las cosas que ya están bien descritas estadísticamente es mal dirigida.* (Levin y Rubin, 2004, p.162)

A manera de concluir esta apartado, en el teorema de Bayes se pueden asociar dos definiciones importantes, la primera está relacionada con la idea germinal que dio origen al teorema de Bayes y la segunda es la que se lleva a la matematización del teorema de Bayes

- *Definición conceptual*: que sugiere que el teorema de Bayes hace énfasis en evaluar una hipótesis basada en el conocimiento previo que se tiene sobre las causas, a fin de actualizar nuestras creencias sobre los sucesos aleatorios
- *Definición operacional*: sugiere que el teorema de Bayes debe cumplir ciertas condiciones matemáticas para su aplicación, como son la equibrobabilidad, la dependencia, la exahusión, etc.

2.3.1.2. Aspecto didáctico del Teorema de Bayes

En cuando al aspecto didáctico se consideró revisar los resultados de investigaciones sobre propuestas de enseñanza entorno al teorema de Bayes.

Uno de los estudios que da luz respecto a los problemas en la enseñanza del teorema de Bayes es la que presenta Díaz (2007), su investigación plante un apartado denominado errores en la inferencia bayesiana, donde menciona investigaciones y resultados de experimentos con individuos que se enfrentan a problemas de probabilidad condicionada o probabilidad inversa. La Tabla 6 solo enfatiza aquellos resultados y problemáticas entorno a la enseñanza del teorema de Bayes.

Tabla 6.

Problemas en la enseñanza del teorema de Bayes según Díaz (2007)

Tipo de Dificultad	Descripción
Situaciones Sincrónicas y Diacrónicas	Estas situaciones surgen de la forma en que un problema platea la secuencia de experimentos en un problema Sincrónicas: son situaciones estáticas en las que no subyace una secuencia de experimentos, sino que los experimentos aleatorios se realizan simultáneamente *En una urna hay tres tarjetas: una es azul por ambos lados, otra es roja por ambos lados y la última es por un lado azul y por otro roja. Seleccionamos una tarjeta al azar y la ponemos sobre la mesa tal y como la sacamos de la urna. La cara que vemos es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja también?*

	Diacrónica: Es claro la secuencia de los experimentos, un experimento se realiza después de otro. *En una urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras. Tomamos una bola blanca de la urna y sin reemplazarla tomamos una segunda bola al azar de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca?*
La forma en que se presenta la información	Señala que cuando la información del problema se presenta con datos como porcentajes o en probabilísticos (ej. 0.10, 3/5, 30%) el individuo tiene mayores dificultades en resolver el problema que cuando se presenta en frecuencias absolutas (ej. 9 de cada 100)
Formas de representación	En a las representaciones se trata de llevar la información o el mismo problema de un formato probabilístico a otro que se ajuste mejor al cotidiano de las personas a) Enseñar a traducir el enuncia del modelo probabilístico a un modelo de frecuencias naturales. Ej. *El .08 de los individuos a 8 de casa 100 individuos* b) El uso de diagramas de árbol para representar la información

Otra investigación es la de Díaz y de la Fuente (2006) que indica que la forma en la que se presente la información, como señala Díaz (2007) (Ver tabla 6), no es un factor que entorpezca el aprendizaje del Teorema de Bayes en algunos casos mejora la actuación de los estudiantes ante problemas escolares de este tipo. Al respecto, Díaz y de la Fuente (2006) dan cuenta que el problema tiene que ver más con la identificación conceptual qué con el tipo de información presente en los problemas, ya que es necesario distinguir entre las probabilidades simples, las independientes, la condicionada directa y la condicionada inversa, lo que conlleva a una mala asignación de los datos y por ende, un error en la aplicación del Teorema. Por tanto, más que enseñar a los estudiantes a resolver diferentes tipos de problemas probabilístico es apremiante una didáctica que permita la identificación de la información conceptual que presentan estos tipos de problemas, como se concluye en su investigación, una mejora en la instrucción favorece el uso de cualquier tipo de datos.

En cuanto a las representaciones, Rodón, Ladino y Orduz (2014), afirman que los libros de texto suelen abordar la resolución de tres formas, axiomática, diagramas de árbol y tablas de doble entrada, así como sus posibles combinaciones (Axiomática- diagramas de árbol, axiomática-tablas de doble entrada, los tres).

En cuanto a los diagramas de árboles, que son lo más común en este tipo de problemas, Gómez (2000) ha desarrollado un modelo denominado *renormalización*, en sus palabras, es una alternativa al diagrama de Bayes que consiste en colocar la información en el diagrama de árbol y operarla como si fuera una probabilidad simple (ver Figura 3).

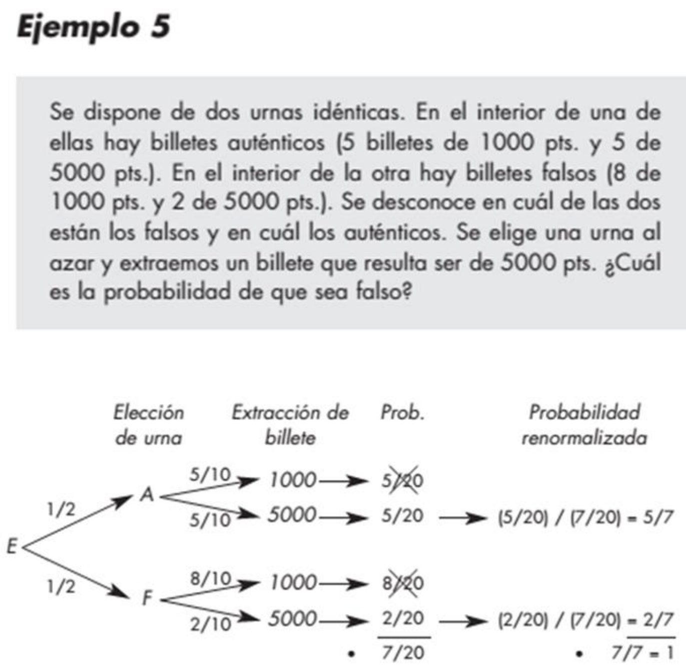

Figura 3. Renormalización de Gómez (2000)

La figura 3 muestra el proceso propuesto por Gómez que consiste en 1) ordenar la información en las diferentes ramificaciones, 2) calcular todas las probabilidades dependientes, 3) de ellas elegir aquellos resultados que cumplen la condición del problema, en este caso tomar un billete de 5000, la suma de los posibles resultados son el casos posibles o bien nuestro espacio muestra, y 4) tomar nuestro caso favorable que cumple que es un billete de 5000 y se encuentra en la urna F para dividirlo entre la suma de los casos posibles. Matematizando el proceso se obtiene:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)} = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$$

Gómez sugiere que para editar una mala conceptualización de la renormalización, es preciso conocer sobre la probabilidad condicional para eventos dependientes, la partición de un evento, la dependencia y probabilidad clásica a fin de facilitarles a los estudiantes la reducción de la fórmula del Teorema de Bayes a una probabilidad clásica.

Rodón, Ladino y Orduz (2014) señalan, que el diagrama de árbol solo es un primer acercamiento de los estudiantes al teorema de Bayes, siendo obligatorios otros registros de representación como lo son las tablas de doble entrada que mejoren su experiencia.

De los enfermos de SIDA de un hospital, el 60% adquirió el virus por transmisión sexual, el 20% por transfusiones de sangre y el 20% por uso de jeringas en drogas. Entre los primeros, el 10% está en período terminal, entre los segundos el 20%, y entre los terceros el 5%. Se elige al azar un paciente de SIDA y resulta estar en estado terminal. ¿Cuál es la probabilidad de que haya adquirido el virus por transfusión de sangre?

Tabla 1: Solución del Problema por Tabla de Doble Entrada o de Contigencia

FORMAS DE CONTAGIO / FASE	Tx "TRANSMISIÓN SEXUAL"	Ts "TRANSMISIÓN DE SANGRE"	Ts "TRANSMISIÓN POR JERINGAS CON DROGAS"	TOTALES
PERÍODO TERMINAL	0.06 (0.60)(0.10)	$\boxed{0.04}$ (0.20)(0.20)	0.01 (0.20)(0.05)	$\boxed{0.11}$
NO PERÍODO TERMINAL	0.54 (0.60)(0.90)	0.16 (0.20)(0.80)	0.19 (0.20)(0.95)	0.89
TOTALES	0.60	0.20	0.20	1

$$P(T_s|P_t) = \frac{0.04}{0.11} = 0.3636$$

Figura 4. Tabla de doble entrada de Rodón, Ladino y Orduza (2014)

Estas tablas de doble entrada facilitan a los estudiantes la ubicación correcta de la información, y reconocer las probabilidades condicionales y conjuntas, así como las particiones de forma más favorable (Zapata y Quintero, 2009).

Por último, la investigación realizada por Penalva y Posadas (2009), da una propuesta de evaluar el teorema de Bayes mediante la formulación de problemas. Ellos partieron de primero brindarles una instrucción a los estudiantes sobre Teorema de Bayes para posteriormente evaluar la formulación de un problema donde esté involucrado la probabilidad inversa, para ello se les brindo solo información del número de particiones y sus respectivas probabilidades. Los resultados mostraron que algunos alumnos no habían comprendido el tema, que otros con el trabajo pudieron significar los conceptos y que otros habían profundizado en el teorema de Bayes y proponían problemas complejos. Lo interesante del trabajo de Penalva y Posadas esta en partir de conceptualizar en el Teorema de Bayes no mediante su resolución sino en la construcción de un problema, partiendo de la hipótesis de que el problema requiere que el autumno posea significados adecuados entorno al estocástico.

Estos resultados de investigación, aunque limitados, dan cuenta de algunas contribuciones respecto a la enseñanza del teorema de Bayes en propuestas para su construcción, representación y evaluación dentro del aula; sin embargo, aún queda por ver si estas estrategias didácticas realmente construyen el saber respecto al del teorema de Bayes o bien, solo mejoran el desempeño frente a problemas escolares.

2.4 Una síntesis necesaria

En el capítulo II, se ha presentado un panorama de investigaciones relacionadas con el CDC y con el Teorema de Bayes, lo que en un primer momento pareciesen ser elementos disjuntos, son una conjunción imprescindible para entender al profesor de matemáticas, más que nada la forma en que interactúan permite distinguir la propuesta de enseñanza.

Al tratar el CDC, se enfocó en dos componentes: *conocimiento del contenido matemático a enseñar* y el *conocimiento de la didáctica de las matemáticas*. El primero elemento necesita de un análisis epistemológico para entender la naturaleza del teorema de Bayes a fin de identificar los significados que el profesor le asocia a dicho teorema. El segundo requiere de conocer cómo se propone enseñar una didáctica específica, la cual no solo tiene que ver con la didáctica general de las matemáticas sino con un tópico en específico, el trabajo se realizó dicho análisis enfocado en la investigación que tiene por objeto evaluar la instrucción, mejor las herramientas o bien proponer una estrategia, brindando elementos para describir como las propuestas didácticas del profesor que son formados de acuerdo al significado que se le atribuye al Teorema de Bayes.

De esta forma, exponer que se entiende respecto al CDC y las componentes que en el trabajo de investigación son reconocidas, así como sobre el Teorema de Bayes favorece el análisis de lo observado en los profesores.

Capítulo 3.
El Método y los Instrumentos de recolección de datos

Introducción

Para responder cuál es la propuesta didáctica que desarrolla el profesor de matemáticas sobre el Teorema de Bayes, se estableció un marco de referencia considerando el conocimiento del profesor mediante el modelo teórico del CDC propuesto por Shulman (1986), del que se ha considerado dos componentes: *el conocimiento del contenido matemático a enseñar* y *el conocimiento de la didáctica de las matemáticas*.

Esta primera parte dio la pauta para el desarrollo del *método* que nos permita dar validez y confiabilidad a la recolección de la información, el análisis e interpretación de los mismos y las posteriores conclusiones, así como permitir la posible réplica de la investigación. Al respecto Reyes-Gasperini (2011) puntualiza lo que se debe entender por *método*, y la postura que se utilizará para esta investigación.

> *El método dependerá entonces del tipo de investigación que se realice, pues no es lo mismo realizar una investigación de corte bibliográfico a otra de tipo cualitativo o bien, histórica o cuantitativa. Ahora bien, una vez tomados los datos, la manera de interpretarlos y analizarlos, conformará nuestra metodología, con ella se transforman los datos en resultados interpretables para la investigación. Esto se logra, sin duda alguna, mediante la articulación teórica, a través del uso de los constructos teóricos abalados teóricamente como herramientas de interpretación plausible.* (p.95)

En síntesis, el método y la metodología no solo consisten en la recolección de los datos, necesaria y suficiente para alcanzar los objetivos, sino el orden lógico y coherente que estructura toda la información (Martínez, 2006). De manera crítica Patton (1990), señala que no existe un método científico como tal sino formas de cientifizar, es decir, formas en que de manera lógica y al estar en la realidad, se pretende explicar la mirada de la realidad y el por qué se interpretaron de alguna forma.

En consecuencia, este capítulo se describe a detalle todo lo relacionado con el método de investigación, la metodología adoptada, la recolección de los datos, la descripción de los participantes y las condiciones necesarias para el análisis e interpretación de la información.

3.1 El paradigma de estudio

De acuerdo a lo planteado en el Capítulo I, el propósito de la investigación es *identifica los significados* y *describir las propuestas del profesor* (al menos de manera hipotética), que se pueden resumir en comprender la forma en que el profesor construye un saber estocástico que requiere para incidir un contexto situado. Para tal fin, se consideró el desarrollo de una investigación de corte cualitativo debido a su enfoque, para Martínez (2006) y Salgado (2007) este consiste en

1) La investigación cualitativa busca responder a ¿qué es? ¿Cómo es? Señalando o describiendo un conjunto de cualidades del fenómeno, estas cualidades formar un sistema complejo y todas interactúan entre sí.
2) La investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón a su comportamiento o manifestación
3) Acepta el "modelo dialéctico", considerando que el conocimiento es resultado de una dialéctica entre el sujeto y el objeto de estudio. De tal forma, que la realidad es producto de un construcción social.
4) La investigación cualitativa se constituye como un enfoque dialectico y Sistémico
5) Tanto el investigador, como los participantes se involucran en un proceso de interacción a fin de comprender el fenómeno.

En particular, éste enfoque permite comprender la realidad del conocimiento del profesor de una forma dialéctica y sistémica. Para distinguir este enfoque de investigación se consideró los trabajos de Stake (1998), Rodriguez, Gil y García (1999), Martínez (2006), Serbia (2007) y Batthyány y Cabrera (2011) y que se describen en la Tabla 7.

Tabla 7.
Características propias de la investigación cualitativa

Características	Descripción
Contexto Natural	La recolección de datos y las observaciones se realizan en el lugar donde los participantes experimental el fenómeno o problema Este contexto natural permite apreciar los significados que el individuo le asigna al objeto de estudio, no solo por los dichos, sino por las acciones.
El investigador	El papel de investigador es interpretar los hechos desde dentro, convirtiéndose en el principal instrumento de la recolección de datos.
Fuentes múltiples de información	Para una mayor comprensión del fenómeno de estudio se utilizan diferentes fuentes de información (entrevistas, observaciones, documentos, etc.) la que posteriormente se analiza para darle sentido y categorizarlo de acuerdo a la realidad que se está presentando.
Análisis inductivo	La investigación cualitativa parte de los datos, de comprender sus relaciones, las conexiones en toda la información a fin de conformar unidades categóricas que nos permitan comprender el objeto.
Significación de los participantes	Lo que se busca en la investigación es evidenciar el significado que los participantes le otorgan al problema o fenómeno.
Diseño emergente	La investigación cualitativa se adapta al fenómeno a estudiar y no al contrario.
Perspectivas interpretativa	Este tipo de investigación se entra en la interpretación de lo que se ve en el contexto donde se estudia el fenómeno. Esta interpretación es social y culturalmente construida, situada en un tiempo, historia y contexto particular.

Dichas características del paradigma cualitativo son las que se comparten en el desarrollo del trabajo y el punto de referencia para comprenderse tanto la forma de la investigación como sus resultados. El optar por este enfoque no fue arbitrario, más bien, surge del deseo de comprender al profesor de matemáticas identificando aquello que significa en su contexto de enseñanza (Perrenoud, 2011), mismo que Shulman (1986) establece como la parte fundamental en las investigaciones sobre el CDC.

Cabe aclarar, que el término *contexto de enseñanza* hace referencia a diversos momentos del profesor que van desde la planeación y organización de los contenidos, la puesta en marcha de los planes en clase, hasta la misma reflexión del profesor sobre aquello que enseña, siendo éste último el aspecto sobre el cuál se incidió en la investigación.

En síntesis se asumió un estudio de los significados que el profesor de matemáticas que surgen de aquello que conoce sobre la materia (sus constructos, nociones, naturaleza, etc.) en un contexto de la enseñanza y aprendizaje de la PyE y bajo un paradigma naturalista e interpretativo.

3.2 El Método: Estudio de Casos

En concordancia con el paradigma y los objetivos de la investigación se decidió utilizar como método el estudio de casos, debido a que se entiende como un método de estudio a profundidad sobre un objeto en particular y ser idóneas en las investigaciones en torno al CDC (Pinto, 2010). En la investigación, se entiende al estudio de casos de la siguiente forma:

> *El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes.*
> (Stake, 1998; p.11)

> *Los estudios de caso son estudios en profundidad; constituyen un laboratorio que facilita reconstruir la complejidad de un fenómeno social, a través de identificar la trama compacta e invisible (los detalles) que lo estructuran. El estudio en profundidad es un acercamiento a lo social cualitativamente diferente al abordaje de las llamadas relaciones macro-sociales, en tanto el tratamiento de lo "macro y de lo micro" implican dos niveles de análisis que se complementan; pero cuyos resultados son diferentes. En uno; como en otro se ven cosas distintas.*
> (García y Vanella, 1992; p.109)

Las concepciones anteriores, señalan que optar por este método se debe a la complejidad del fenómeno que se desea estudiar, pero también a la profundidad que el investigador desea tener sobre la construcción social en la que incide. En cuanto a las ventajas está lo inclusivo de las diferentes formas de recolección de datos y lo compatible con otros métodos favoreciendo a la triangulación y concreción de los resultados del fenómeno (Stark y Torrance, 2005; Martínez, 2011).

Existes dos cuestiones importantes por las que se consideró el estudio de casos en esta investigación y que tienen que ver las afirmaciones hechas por Martínez (2011):

- En el estudio de casos puede ser meramente descriptivo o exploratorio. Es descriptivo si lo que se pretende es identificar y describir a relación que tienen los diferentes factores que influyen en el fenómeno, y exploratorio cuando pretende vincular la teoría con la realidad del objeto de estudio
- El estudio de casos permiten una replicación literal como teoría, es decir, que permiten la trasferencia de la teoría a otros casos u contextos.

Estas dos afirmaciones son importantes debido a la forma en que fueron planteados el objeto de estudio, ya que se pretende describir el conocimiento del profesor haciendo un contraste entre el marco de referencia y la realidad del objeto que se está estudiando, lo que permite clarificar las descripciones que se hagan y dar interpretaciones solidadas de la construcciones de la realidad que se proponga (Stake, 1998). De igual forma, el método valida la utilización del CDC para describir las propuestas del profesor de matemáticas en un escenario escolar de estadística y probabilidad, debido a que permite la trasferencia de la teoría a otros casos u contextos concretos.

3.2.1 La descripción de los casos estudiados

Para la selección de los participantes se consideró que hayan tenido una misma formación inicial asegurando un punto en común en los casos estudiados, a saber egresados de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas (LEM) de la Facultad Autónoma de Yucatán (UADY)[4]. Estos profesionales tienen un alto impacto laboran en el Nivel Medio

[4] Esta información fue tomada de sitio web de la Facultad de Matemáticas, UADY http://www.matematicas.uady.mx/index.php/planes-estudio/licenciaturas/licenciatura-en-ensenanza-de-las-matematicas/52-programas-de-estudio/licenciaturas/licenciatura-en-ensenanza-de-las-matematicas/plan-en-liquidacion/licenciatura-en-ensenanza-de-las-matematicas-plan-en-liquidacion/186-objetivos

Superior (NMS) del estado de Yucatán, y cuentan con las conocimientos profesionales (cognitivos, didácticos y pedagógicos) que le permitan contribuir de forma significativa en el ámbito de la matemática educativa.

A manera de contextualizar la formación, los LEM tienen dentro de su plan de estudios la asignatura de Probabilidad (3er semestre), Inferencias estadística (4to semestre) y Diseños de Experimentos (6to semestre), lo cual asegura que todos los participantes cuentan con el conocimiento y herramientas de naturaleza estocástica dentro de su formación inicial.

Por último, se consideró que los profesores estuvieran laborando en alguna institución sea pública o privada de nivel bachillerato e independientemente del subsistema al que pertenezcan; asegurando que al momento de la investigación estuvieran impartiendo la materia de Estadística y Probabilidad o Matemáticas V, y que dentro de la planeación de la materia estuviera considerado el Teorema de Bayes. De lo anterior, se caracterizan a los sujetos como se muestra en figura 5.

Figura 5. Caracterización de los participantes.

Las uniones representas las características que fueron común en los participantes, y aquellos círculos sin unión representan aspectos que difieren de un participante a otro, pero que no fueron considerados dentro del estudio debido a que son sucesos independientes.

Para la invitación de los participantes, se diseñó un cartel donde se hacía referencia a colaborar en una investigación compartiendo sus experiencias en torno a la enseñanza del Teorema de Bayes obteniendo respuesta de seis profesores de matemáticas; cuatro de ellos laboraban en una institución privada, uno en una institución estatal y uno en la UADY. La razón de abrir una invitación de esta forma se debido dos consideración: 1) El profesor de matemáticas es un profesional que necesita profesionalizar su práctica (esto no quita que sea un experto en la materia) y, 2) se asume que estos procesos de reflexión y de compartir su experiencia docente deben ser de carácter voluntario, para que permita la permanencia y el acercamiento entre profesor y el investigador (Parada, 2011). Con los seis profesores interesados en la investigación, se estableció un primer encuentro en donde se les platicaría a detalle su participación, los objetivos de la investigación y los requerimientos de la participación.

El objetivo que se les presento a los profesores fue el de conocer como ellos en su profesión enseñan el Teorema de Bayes y las implicaciones que tiene traducir de un currículo a un proceso de instrucción en el aula. De igual manera se les comunico en una segunda entrevista, la necesidad de conocer su planeación, el libro de texto y el proyecto o tareas que se asignaban en el aula. Al final de la primera reunión se concretó la participación de dos profesores, a los casos los llamaremos Ana y Enrique por motivos de ética en la investigación cualitativa.

Ana es maestra de bachillerato en una institución privada incorporada a la SEP, tiene tres años impartiendo la materia en dicha institución, y que además imparte las materias de Matemáticas III y Cálculo diferencia en el mismo periodo semestral; cuenta con el diplomado en competencia que ofrece la SEP y no cuenta con alguna formación adicional para la enseñanza de la estadística y la probabilidad.

Enrique es profesor del bachillerato de la UADY, lleva dos años impartiendo la materia, así como la materia de Matemáticas I y Matemáticas III en el mismo periodo semestral, además de su profesión como docente, estudia una ingeniería y trabaja de forma independiente impartiendo asesorías de matemáticas.

Existe una diferencia entre las instituciones en las que laboran Ana y Enrique, aunque ambos están operando bajo en enfoque por competencias que es parte de lo que propone la Secretaria de Educación Media Superior, la institución de Ana tiene que seguir estrictamente las normas que se establecen para el estabelecimiento de la Reforma Educativa como llevar el libro de texto que sugiere, ajustarse al cronograma propuesto, cumplir con los tiempos y las forma. Aunado a ello, Ana no cuenta con un grupo académico de matemáticas, así que las decisiones en su mayoría le son comunicadas por el coordinador académico.

En la institución de Enrique debido a que es autónoma le brinda cierta libertad a las decisiones que tome el grupo académico del área de PyE; ellos pueden modificar el currículo de acuerdo a las necesidades, así como ajustar los tiempos y fechas de exámenes. Enrique pertenece a tres grupos académicos debido a las materias que imparte, la función en específico de este grupo es más administrativo que académico. Enrique atiende a tres grupos, de 25 estudiantes aproximadamente.

Estas distinciones entre Ana y Enrique, serán retomadas en el capítulo de conclusiones y discusiones porque resultan determinantes en la investigación.

3.3 Las dimensiones e indicadores del CDC

Para el establecimiento de las unidades de análisis se consideró la propuesta de Pinto (2010) sobre el estudio del modelo teórico del CDC. Dicha propuesta surge del análisis y reflexión sobre diferentes investigaciones de carácter sistémico y con rigor científico, que han establecido algunos aspectos que componen y caracterizan el CDC.

En su propuesta se dividen las tres componentes en *dimensiones*, que son las formas en que se particiona cada componente y son las unidades de análisis; a su vez estas *dimensiones* se segmentan y codifican en *indicadores*, estos son las que permiten recolectar los datos y categorizar todo lo observado dentro CDC (ver Figura 6). De tal forma que los componentes quedan particionadas de la siguiente manera:

- El *conocimiento del contenido a enseñar*: contiene 6 dimensiones, 18 indicadores y 25 subindicadores
- El *conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales*: contiene 6 dimensiones, 24 indicadores y 19 subindicadores
- El *conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante en un tópico específico*: contiene 4 dimensiones, 24 indicadores y 19 subindicadores.

Tabla 1.9. Dimensiones e Indicadores de los componentes del CDC

A *Conocimiento del contenido a enseñar*	***B*** *Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales*	***C*** *Conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante del tópico específico*
I. **Concepciones**	I. **Concepciones de E – A**	I. **Conocimiento del proceso cognitivo**
1. Las matemática	1. Matemáticas	1. Origen y evolución en el estudiante
2. El contenido matemático	2. Contenidos Matemáticos	
3. El tópico específico	3. Tópico específico	2. Desarrollo humano
		a. Edad
II. **Fuentes de obtención de su**	II. **Fuentes de obtención de su**	b. Experiencia
conocimiento	**conocimiento**	c. Antecedentes
1. Inicialmente	1. Inicialmente	d. Escolaridad
2. Permanentemente	2. Permanentemente	
		3. Creencias
III. **Disposición**	III. **Currículo**	
	1. Programas de curso	4. Concepciones
IV. **Conocimiento del currículo**	a. Planeación y organización	
1. Contenido escolar	b. Contenidos	5. Errores y dificultades
2. Planes de clase	c. Estrategias genéricas	a. Atribuciones y causas
3. Matemáticas como disciplina	d. Estrategias específicas	
escolar	e. Recursos para la enseñanza	6. Relacionar lo anterior-nuevo
	f. Evaluación de los aprendizajes	
V. **Creencias**	g. Bibliografía	7. Intereses
1. Dilemas		
2. Cambios	2. Materiales	8. Motivaciones
	a. Textos	a. Intrínsecas
VI. **Conocimiento esenciales**	b. Audiovisuales	b. Extrínsecas
1. Conceptos	c. Calculadora	
a. imagen	d. Programas por computadora	9. Expectativas
b. familias de conceptos	e. Uso de internet	
c. formas de aproximarse	f. Tareas	10. Formas de aprender
d. diferentes usos	g. Presentaciones	
e. atributos críticos	h. Otros	11. Dificultades de aprendizaje
f. teorías y modelos		
g. relaciones	IV. **Vinculación**	II. **Diagnóstico**
h. repertorio de ejemplo (propios	1. Contenido matemáticos	1. Creencias
y no propios)	2. Tópicos específicos	2. Concepciones
	3. Contenidos con otras disciplinas	3. Antecedentes
2. Procesos		4. Estrategias de aprendizaje
a. Procedimientos	V. **Estrategias de enseñanza específicas**	5. Otros
b. Algoritmos		
c. Lenguaje formal	1. Analogías	III. **Estrategias**
	2. Demostraciones	1. Genéricas
3. Evolución histórica	3. Uso de proyectos	2. Específicas
a. Historia	4. Simulaciones	a. Construir sobre ideas matemáticas
b. Naturaleza de las explicaciones	5. Tareas	b. Corregir errores conceptuales
c. Heurística	a. Ejercicios	c. Retroalimentación
	b. Problemas	d. Contrastar ideas con otras

4. Formas de representación
   a. Propias
   b. No propias

5. Principios
   a. Teoremas
   b. Postulados
   c. Axiomas

6. Vinculación
   a. Otros conceptos
   b. Contexto
   c. Disciplinas
   d. Vida diaria

7. Cultura matemática

8. Ética y valores
   a. Valores morales
   b. Valores estéticos

   c. Casos
   d. Situaciones

6. Preguntas
7. Ilustraciones
8. Explicaciones
9. Demostraciones
10. Evaluación
11. Otros

VI. **Dificultades**
1. Para enseñar
2. Para evaluar
2. Formas de solución

   e. Solicitar usar evidencia
   f. Otros

IV. **Materiales**
1. Tareas
2. Textos
3. Ilustraciones
4. Observaciones
5. Otros

Figura 6. Dimensiones e indicadores del CDC
Fuente: Pinto (2010)

Si bien estas particiones permiten entender al CDC de una forma amplia y sistémica, también propone que se pueda estudiar una sola componente, ejemplo de ellos son las investigaciones de Espíndola (2014) y Uc (2014) que se enfocaron en estudiar sobre *el conocimiento de las estrategias y representaciones* interacciónales para media aritmética y la variabilidad respectivamente. Así, la propuesta de Pinto a la que se le denomina *Sistema de Dimensiones e Indicadores* del CDC (SDI del CDC en Espíndola, 2014), no solo nos permite estudiar a detalle el CDC sino que nos permite trasladar este modelo a contextos como lo es la matemática, y sobre tópicos específicos, como lo es el teorema de Bayes, a fin de profundizar sobre el conocimiento que el profesor usa para la enseñanza.

Partiendo del SDI del CDC se consideró hacer una reducción en las dimensiones e indicadores a fin de que estuvieran acorde a los objetivos planteados en la investigación y que permitiera la contrastar los datos con los resultados de los aspectos didácticos y epistemológicos del teorema de Bayes desarrollados en el Capítulo II. En la Tabla 8 muestra las dimensiones e indicadores que se analizaron.

Tabla 8.
Dimensiones e indicadores de los componentes del CDC a considerar en este estudio.

A *Conocimiento del contenido matemático a enseñar*	B *Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales*

I. Concepciones 1. Sobre la probabilidad y la estadística 2. Sobre los contenidos de probabilidad y estadística 3. Sobre el Teorema de Bayes **II. Fuentes de obtención de su conocimiento** 1. Inicialmente 2. Permanentemente **III. Conocimiento del Currículo** 1. La asignación del teorema de Bayes 2. Planes de Clase 3. Estásdística y probabilidad como disciplina escolar **IV. Conocimientos esenciales** 1. Concepto a. Imagen b. Familias de conceptos c. Formas de aproximarse d. Diferentes usos e. Atributos críticos f. Teorías y modelos g. Relaciones h. Repertorio de ejemplos 2. Procesos a. Procedimientos b. Algoritmos c. Lenguaje formal 3. Formas de representación a. Propias b. no propias 4. Principios a. Teoremas b. Postulados c. Axiomas 5. Vinculación a. Con otros conceptos b. Contextos c. Disciplinas d. Vida diaria	**I. Concepciones de E-A** 1. Contenido Matemático 2. Del tópico específico **II. Currículo** 1. Programas de curso a. Planeación y organización b. Contenidos c. Estrategias genéricas d. Estrategias específicas e. Recursos para la enseñanza f. Evaluación de los aprendizajes g. Bibliográfica 2. Materiales a. Texto b. Audiovisuales c. Calculadora d. Programas por computadora e. Uso de internet f. Tareas g. Presentaciones h. Otros **III. Vinculación** 1. Contenido matemático 2. Tópicos específicos de estadística y probabilidad 3. Contenidos con otras materias **IV. Estrategias de enseñanza específica** 1. Analogías 2. Demostraciones 3. Uso de proyectores 4. Simulaciones 5. Tareas 6. Preguntas 7. Ilustraciones 8. Explicaciones 9. Demostraciones 6. Modelos 7. Tratamiento de los estocásticos a. Cultura estocástica b. Razonamiento estocástico c. Pensamiento estocástico

A manera de contextualizar, el SDI del CDC fue útil como modelo para obtener la información y clasificarla, ya que los indicadores permiten identificar dentro de toda la información segmentos que pueden ser categorizados para su posterior interpretación.

Cabe señalar, que la investigación pretendía conocer el cocimiento que el profesor usa *para la enseñanza*, no en términos que propone Shulman dentro del CDC, sino entendiéndola como aquel momento o momentos anteriores al aula, es decir, todo el proceso cognitivo y de reflexión que involucran el conocimiento del profesor para desarrollar una propuesta didáctica sobre los estocásticos, que sean significativos en el aula y le permitan a los estudiantes generar conocimiento funcional.

Con ello en mente, se modificaron algunas categorías contextualizándola a la enseñanza de la PyE y se suprimieron algunas dimensiones o indicadores debido a su relación con los proceso de instrucción en el aula.

Por último, el sistema fue útil para la elección y construcción de los instrumentos de recolección de datos debido a al establecer las unidades de análisis permite discriminar sobre las herramientas que son más idóneas para la recolección de la información.

3.4. Instrumentos de recolección de Datos

Partiendo del marco de referencia sobre el CDC, el teorema de Bayes y el SDI del CDC, se establecieron tres tipos de instrumentos de recolección de información: 1) una entrevista profunda, 2) entrevista basada en un problema típico y 3) los materiales utilizados en su enseñanza. La figura 7 muestra la relación entre estos tipos de instrumentos.

Los instrumentos dieron cuenta del conocimiento en uso del profesor de matemáticas, que son los significados que el profesor le asocia a un objeto matemático y que tienen la función de validar sus argumentos y traducir su noción del objeto a una propuesta de enseñanza, por tanto los mismo instrumentos nos permitieron triangular la información obtenida (Ver figura 7)

Figura 7. Relación de los instrumentos de recolección de información

3.4.1 Primer momento: Entrevista profunda

Esta herramienta de recolección de información constituye el primer momento en el acercamiento de manera formal con Ana y Enrique.

Para la entrevista se adoptó un enfoque desde el paradigma cualitativo, que considera que las entrevistas cualitativas tienen una estructura que puede variar según el informante y la información que se proporciona, no son directas, pueden estandarizarse para todos los casos, y no solo consisten en que el investigador pregunte esperando una respuesta exacta del informante, sino que son dinámicas y flexibles o bien, en un sentido más definido:

> (La) *Entrevistas cualitativas en profundidad entendemos reiterados encuentros cara a cara entre el investigador y los informantes, encuentros éstos dirigidos hacia la comprensión de las perspectivas que tienen los informantes respecto de sus vidas, experiencias o situaciones, tal como las expresan con sus propias palabras. Las entrevistas en profundidad siguen el modelo de una conversación entre iguales, y no de un intercambio formal de preguntas y respuestas* (Taylor y Bogdan, 1987, p.100)

Por tanto, las entrevistas cualitativas no buscan solo obtener información, sino comprender la realidad del informante. En ese sentido, el investigador no solo está buscando su objeto de investigación sino que busca comprender la conducta, las prácticas y las acciones del informante en un contexto en particular, busca aprehender de esa realidad. Por tanto, la flexibilidad y el dinamismo se convierten en su característica principal, en el sentido que habla Taylor y Bogdan (1987), el investigador no debe saber que preguntar sino cómo preguntar, en qué momento preguntar y cuándo incluir una pregunta más.

Lo esencial de las entrevistas cualitativas es la construcción de una realidad presente en la mente de los informantes, para ello se necesita conocer sus significados, sus perspectivas y definiciones, de tal manera que la información que aporta el informante tiene una carga simbólica.

La pertinencia de escoger realizar una entrevista cualitativa se debe a las siguientes consideraciones (Taylor y Bogdan, 1987):

- Los intereses de la investigación son relativamente claros y están relativamente bien definidos
- Los escenarios o las personas no son accesibles de otro modo
- El investigador tiene limitaciones de tiempo

En la investigación la entrevista tenía la intención de conocer como los significados asociados a los estocásticos permitían hacer argumentaciones y propuestas para el aula.

3.4.1.1. Caracterización de la Entrevista

Según la caracterización propuesta por Batthyány y Cabrera (2005), la entrevista que se utilizó en la investigación puede categorizarse como *semiestructurada*, ya que se consideraba con ciertos apartados y tópicos en los que se deseaba profundizar. Estos apartados y tópicos surgen de considerar los trabajos realizados por Pinto (2010), Espíndola (2014) y Uc (2014), la tabla del SDI del CDC y la información establecida en el marco de referencia.

En cuanto a su estructura esta constaba de 22 preguntas previas, que no necesariamente fueron todas abordadas por el investigador, ya que algunas eran para recupera el ritmo de la entrevista si en algún momento se perdía. Las preguntas abordaban cinco apartados: 1) preguntas de identificación general como profesor, 2) preguntas sobre su formación como profesor de estadística y probabilidad, 3) Nociones sobre la probabilidad y la estadística y 5) Nociones respecto a su enseñanza del teorema de Bayes.

Las SDI del CDC permitieron clasificar las preguntas según las respuestas que se esperaban de los profesores, un ejemplo de ello se presenta en la Tabla 9

Tabla 9.
Ejemplo de preguntas de la entrevista semiestructurada

Pregunta	Según las respuestas esperadas por los profesores		
	Dimensiones del CDC	Indicadores de los componentes analizados	Subindicadores
16. ¿Cuáles son los elementos claves para aprender el teorema de Bayes?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	I Concepciones	3 Sobre el teorema de Bayes
		IV Conocimientos esenciales	4 Principios

Para concluir, es necesario considerar que debido al enfoque de la entrevista, se realizaron otras preguntas necesarias para clarificar la información que brindaba los profesores, sin embargo, las respuestas no se consideraban fuera de los indicadores asignados. Es importante señalar que toda la entrevista fue grabada en audio y tuvo una duración de aproximadamente de una hora reloj.

3.4.2 Segundo Momento: La entrevista basada en el problema típico

Para este momento de la investigación se consideró las investigaciones de Azcárate y Cardeñoso (2003); Medrano y Bermúdez (2011); Contreras, Batanero, Díaz y Artega (2013); Figueroa, Baccelli, Prieto y Moler (2013); Uc (2014), Huerta y Arnau (2014) y Ortiz (2014), cada uno de los trabajos utilizaba la resolución de problemas de probabilidad o estadística para obtener información sobre las nociones, los significados, los sesgos heurísticos, las dificultades cognitivas o las representaciones semióticas de los futuros profesores, de profesores en servicio o de estudiantes. Sólo en el caso de Medrano y Bermúdez (2011), utiliza la resolución de problemas en un contexto matemático diferente al de la PyE.

Según las investigaciones citadas en este apartado, la técnica de resolución de problemas sitúa al individuo en un contexto oportuno para enfrentarlo según sus propios enfoques y sus decisiones, misma que es fundamentada por aquello que conoce y en los escenarios donde entra en juego aquello que se conoce. De tal forma, que para la investigación se decidió utilizar un problema típico de la enseñanza de la probabilidad para profundizar sobre el conocimiento del teorema de Bayes y cuya finalidad era situar al profesor en un contexto escolar.

3.4.2.1 Caracterización del problema típico.

Para su construcción se consideró el problema propuesto por Strogatz (2010), el cual registra que para la resolución del problema se puede reducir el teorema de Bayes en caso favorables a casos posibles. De acuerdo a su investigación el 50% de las personas que se enfrentan al problema no pueden resolverlo correctamente. El problema dice lo siguiente:

> *Se sabe el que 0,8 % de las mujeres adultas pueden tener cáncer de mamas. Si una mujer tiene cáncer de mamas, hay un 90 % de probabilidad que tenga una mastografía positiva. Si una mujer no tiene cáncer de mamas, todavía existe un 7 % de probabilidades que tenga una mastografía positiva. Si una mujer va al control anual y tiene su mastografía positiva ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cáncer?*

En Díaz y Fuentes (2006) se señala que los individuos que se enfrentan a problemas que involucran el teorema de Bayes tienen problemas en diferencia entre a probabilidad condiciona y la probabilidad condicionada inversa, y en identificar los elementos para su resolución, por lo cual se decidió modificar el problema de la siguiente manera

> *Se sabe el que 0,8 % de las mujeres adultas pueden tener cáncer de mamas. Si una mujer tiene cáncer de mamas, hay un 90 % de probabilidad que tenga una mastografía positiva. Si una mujer no tiene cáncer de mamas, todavía existe un 7 % de probabilidades que tenga una mastografía positiva.*
>
> a) *¿Qué probabilidad tiene una mujer adulta de tener una mastografía positiva?*
> b) *Supongamos que la mujer adulta tiene cáncer ¿cuál es la probabilidad de que la mastografía resulte negativa?*
> c) *Si la mujer adulta va al control anual y tiene una macrografía positiva ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cáncer de mama?*

La dificultad en el problema radica en que el a) implica el cálculo de una probabilidad total, b) el cálculo de una probabilidad condicionada y el c) el teorema de Bayes. Antes de su aplicación a los profesores, se le presento el problema a un ingeniero, a un matemático y a un alumno de preparatoria que había cursado la asignatura de PyE. Esta prueba piloto no sirvió obtener la versión final del problema, debido que:

- En la primera estructura se pendía el cálculo de probabilidad de una “mujer” y no de “mujer adulta”, lo que llevo alguno de los participantes a mencionar que no era posible realizar el cálculo de las probabilidades debido a que los datos no se proponían para cualquier mujer sino para una mujer adulta, sea lo que sea eso.
- Para el alumno de preparatoria fue más fácil distinguir el tipo de cálculo de probabilidades porque la estructura es común a la que ve en el aula
- Para el ingeniero y el matemático no había diferencia entre el inciso b) y c) y para el matemático no tenía sentido el inciso c) debido a que sí la mastografía salía positivo era definitivo que tenías cáncer.

De acuerdo con estas reflexiones, se consideró que si era posible mediante el problema conocer y profundizar sobre los significados que el profesor le atribuye al teorema de Bayes, desde su discriminación, la aplicación de la formula y discutir la relevancia del problema.

3.4.2.2 La Resolución del problema

Durante la aplicación se le pidió a Ana y Enrique que fueran describiendo los pasos a seguir en la resolución del problema, es decir, que mientras resolvían el problema brindan una explicación del porqué de sus resolución como si fuera una situación hipotética entre profesor y alumno. Posterior a su resolución, se les pidió explicaciones sobre aquello que no quedaba claro en el momento de la resolución. Toda la resolución fu video grabada, y audio gradaba para su posterior análisis.

3.4.3. Tercer Momento: Los materiales y documentos que el profesor utiliza para su enseñanza

Para Llinares, Valls y Roing (2008), una de las prácticas profesionales que realiza el profesor tiene que ver con seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas, y que dicha actividad tiene implicaciones en el conocimiento del profesor:

> *Implica conocer y organizar el contenido matemático para enseñarlo. Es un requisito para el docente conocer los contenidos matemáticos como objetos de enseñanza y de aprendizaje; utilizar la información de esos contenidos para diseñar, seleccionar y analizar problemas, actividades y ejercicios como instrumentos de aprendizaje matemático del alumno (por ejemplo, estableciendo niveles de demandas cognitivas en las diferentes actividades), o para modificar secuencias de enseñanza previamente establecidas*. (Llinares, 2011, p.127)

En consecuencia, la selección de materiales didácticos, de libros de textos para formar sus propuestas, sus planeaciones, sus anotaciones, sus proyectos y todo aquello que el profesor considera para que un tópico sea aprendido, pone de manifiesto cuanto sabe el profesor sobre los estocástico y aquello que desea que el alumno aprenda.

De esta manera las herramientas de didácticas que él haya diseñado están cargados del significado que el profesor le atribuye al saber y aquellas herramientas didácticas de terceros, de las cuales se ha apropiado, deberían compartir en esencia los mismos significados o bien fortalecen los significados que él tiene del objeto.

En la investigación se les pidió a Ana y Enrique, que nos compartieran aquellos materiales y documentos que ellos utilizan en la clase, lo recabado fueron:

- Diapositivas de la presentación
- Libros de texto
- Planeaciones de clase
- Proyectos Finales

Toda esta información se analizó para contrastar y corroborar lo obtenido en los dos momentos anteriores, pues es en este punto donde se conjugan el *conocimiento del contenido matemático* y el *conocimiento de las estrategias y representaciones* *instruccionales* (Ver figura 7) La mayoría de la información se analizó a la luz del componente B propuesto en la tabla del SDC

3.5 Trascripción de la Entrevista

Para la trascripción de la entrevista profunda y la basada en ejercicio típico se consideró seguir las recomendaciones de Gibs (2012) y Pinto (2010):

- Se enumeraron las intervenciones del investigador y del participante a fin de distinguir la información
- Se consideraron eliminar las muletillas, y los gestos y clarificaciones que pudieran interrumpir la continuidad de la idea en la lectura, en su lugar en algunas ocasiones se utilizó paréntesis para explicar la acción.
- Los puntos suspensivos indican una suspensión en el discurso
- Entre comillas se indican las expresiones que hacen referencia a terceros, presenta un ejemplo o explicación.

Todo ello se estableció en una tabla de columnas, donde se indicaba el tiempo, la intervención del entrevistador y la respuesta del entrevistado, la categoría que se la había asignado, y una categorización preliminar de la lectura, como se muestra en la Tabla 10,

Tabla 10.
Transcripción de la entrevista

Tiempo	Categoría del SDI	Entrevistador	Entrevistado	Categoría preliminar

Fuente: Pinto (2010)

La diferencia principal entre la categoría del SDI y la categoría preliminar, es que la primera es la propuesta para la entrevista, y la segunda es aquella que aparece un indicador y posiblemente sea información valiosa. Se consideró asignar tiempo, a fin de poder escuchar las grabaciones en el momento que sea necesario.

Cabe señalar, que debido a la cantidad de tiempo y diálogos presentados en la entrevista no fue posible la trascripción total de la entrevista.

3.6 Análisis y Codificación

Para el análisis de la información se optó por realizar un análisis del contenido (Bardin, 1986; Piñuel, 2002), para ello se utilizaron estrategias inductivas que nos permitirá posibles patrones de relaciones entre los segmentos de información que nos consintiera entender los significados que el profesor le asocia a los estocásticos.

Para ello se clasificaron las unidades de análisis siguiendo la propuesta de Uc (2014), en la que se propone clasificar las unidades considerando de donde viene la información, seguido de la inicial del participante y la letra del componente al que pertenece, y finalizando con el indicador al que hace referencia. Se consideró la siguiente nomenclatura para las herramientas 1) Entrevista Profunda (EP), 2) Entrevista basada en un problema típico (PT) y 3)Materiales y documento (MD)

Una vez seleccionado el procedimiento de análisis y codificación de la información a utilizar se determinaron las unidades de análisis, considerando que los segmentos de la información se encontraran relacionado con el motivo de análisis, es decir, se trató de identificar la idea que unía a todos esos segmentos partir de los dominios establecidos en el CDC, para posteriormente crear una categoría que emergiera de los datos y pudiera explicar a qué del conocimiento hacía referencia.

A partir dela categorización descriptiva, se realiza un análisis conceptual, se analizó la información en contraste con lo teórico que sustenta a objeto de investigación. En este caso los asociados a los significados en el teorema de Bayes: Conceptualización y difusión.

3.7 El informe de los resultados

Debido al paradigma de investigación es de corte cualitativo se pudo estudiar algunos significados que el profesor le atribuye a los estocásticos, en particular al teorema de Bayes, y cómo estos permean las propuestas didácticas que el realiza. Estas dos particularidades son las que para la investigación tiene vital importancia, y sustentan el hecho de que el conocimiento de los saberes estocásticos es un elemento que contribuye a la imposición o reconstrucción de los discursos matemático que se propone en el aula.

3.8 Fiabilidad y validez

En cuanto a la fiabilidad del estudio se puede decir que se cumplieron las normas éticas establecidas para este tipo de investigación, además que los profesores participaron de forma voluntaria, motivados por su propio carácter profesional de crecer y de mostrar la realidad en la cual se desarrollan profesionalmente.

En cuanto a la validez se optó por la triangulación en los instrumentos de recolección de datos, que permitió el contraste de la información recolectada.

Es posible que para este tipo de investigación, sean necesario otros criterios para apelar al rigor metodológico como lo es la suficiencia y adecuación de los datos (Rodríguez, Gil y García, 1996) La suficiencia se refiere más que a la cantidad de sujetos a la cantidad de información, de tal forma que cuando nueva información es incorporada y esta resulta repetitiva o relevante, se ha llegado a la “saturación de la información”, y por ende, la cantidad información que se tiene es idónea para explicar el fenómeno. La adecuación, hace referencia al hecho de que la selección de la información va acorde a las necesidades teóricas de estudio.

Capítulo 4.
Análisis de información

Introducción

Con la finalidad de identificar y describir los significados que el profesor de matemáticas asocia a los estocásticos, y sí éstos norman la construcción de sus propuestas de enseñanza, se hizo énfasis en el análisis de mirar aquellos aspectos que dieran indicios entre la relación de los significados y propuesta. Para el análisis inductivo, se decidió establecer tres apartados temáticos de la evidencia empírica, a saber, 1) *Los significados asociados a los estocásticos,* 2) *los significados asociados al teorema de Bayes* y 3) *la propuesta de enseñanza del teorema de Bayes.*

El apartado de *los significados asociados a lo estocástico*, da cuenta de la concepción que los profesores tienen de la asignatura de estadística y probabilidad, la forma en que las relacionan, los vínculos entre el conocimiento, las valoraciones y distinciones de los mismos. En *los significados asociados al teorema de Bayes* se centra el análisis a aquella construcción que se hacen entorno a este saber, sus limitantes, las implicaciones, los conocimientos previos, el contexto en el que debe enseñarse. El tercer apartado, *la propuesta de enseñanza del teorema de Bayes*, pretende una explicación entorno al tratamiento que presenta la enseñanza del saber desde el supuesto de aquello, que bajo la perspectiva del profesor, debe normar la clase.

El análisis se presenta de forma independiente para Ana de Enrique, y viceversa, con el objeto de enriquecer los resultados y no entremezclar los significados y propuestas de cada profesor, otorgando el peso propio a las construcciones de cada uno de ellos. Asimismo, se decidió contextualizar al profesor dentro de su situación profesional en la institución que labora; las ventajas, demandas y requerimientos que se le asigna como profesional de la enseñanza de la matemática.

4.1 El Caso de Ana

Ana es una profesora que se ha desarrollado profesionalmente dentro de instituciones privadas incorporadas la SEP; en el momento de la investigación formaba parte del cuerpo académico de una escuela preparatoria. La razón por la que Ana fue considerada para formar parte del cuerpo académico es debido a que su perfil le permite ser una profesora de diferentes asignaturas de matemáticas simultáneamente en el mismo periodo semestral, entre ellas la de estadística y probabilidad.

> *"Me la asignaron como materia... porque prácticamente hace poco entre, entre en septiembre (refiriéndose a su contrato en la escuela), y nada más había como opción dar segundo y tercer año. Como opción dar todas las de matemáticas, de por sí mi perfil es de matemáticas… no las escogí me las dieron, de hecho hay otro profesor de matemáticas, él es el que da primer año, y él dice que nada más le gusta dar algebra"*
>
> [EP_Ana_profesor_1]

Asimismo, resalta la característica de los estudiantes que se atienden dentro de esta institución: un porcentaje son rezagados y provienen de otras instituciones educativas, tienen diferentes actividades escolares (danza, natación, atletismo, etc.) impidiendo una asistencia constante y continua a las clases, y algunos tienen capacidades diferentes [EP_Ana_Profesor 7, 9]. Estas condiciones son determinantes en la labor de Ana, delimitando los tiempos para la planeación, elaboración y ejecución de la clase, el tipo de actividades y tareas que se propone, y la diversidad de estrategias que tiene que implementar para cumplir con los lineamientos que la institución de proponer. En cuanto a las exigencias institucionales se encuentran: un porcentaje máximo de alumnos reprobados por unidad, la elaboración de reportes para los padres, el cumplimiento del 50% de la calificación asignada a las tareas, y el uso de las guías didácticas propuestas por la SEP.

> … "*Dime ¿por qué tu estas aquí? es que reprobé matemáticas tres, en la modelo ¿y por qué reprobaste? Porque no entregaba mis tareas, ¿y por qué crees que tu mamá te mando aquí? Déjelo ya no quiero hablar con usted.* Los papás saben que están ahí, porque saben que los estamos ahí chiqueando"
>
> [EP_Ana_profesor_7]

> *"Dentro del salón,…, tengo un chico son Síndrome de Down, está en tercer año llevando estadística y probabilidad, pero cuando está el tengo que darle un juego de copias porque todavía le estoy enseñando a multiplicar"*
>
> [EP_Ana_ profesor 9]

En cuanto a su experiencia en el contenido de la asignatura, ha impartido cuatro veces la asignatura de estadística y probabilidad, por tanto, no es una profesora novata frente a los contenidos de esta asignatura; al menos ha tenido que interactuar en cuatro ocasiones con estos contenidos para elaborar una propuesta didáctica para su tratamiento.

> *Con este (se pone a pensar) creo que es la 4 vez [EP_Ana_profesor_2]… Es el primer año, y es la primera vez aquí, que doy probabilidad y estadística"*
>
> [EP_Ana_profesor_10]

Si bien, este apartado no brinda evidencia respecto a los significados y propuestas de Ana, si permite acentuar la importancia de aquello que conoce sobre los estocásticos, y particularmente sobre el Teorema de Bayes, debido a que el contexto laborar donde se desenvuelve requiere de la implementación de estrategias que le permitan atender las necesidades de los estudiantes y su diversidad de condiciones, y las exigencias institucionales. Dichas estrategias surgen de su interpretación y comprensión sobre los estocásticos, y como la comunica dentro del aula.

4.1.1. Los significados asociados a los estocásticos

Para entender la comprensión de Ana sobre los estocásticos, se decidió preguntar sobre su valoración respecto a la estadística y la probabilidad, partiendo de su experiencia docente:

> *¿Entre la estadística y la probabilidad, cuál considera sea más fácil de aprender para los estudiantes?*
> *Estadística, Probabilidad no lo ven como muy necesario, no entienden hacia dónde vamos a llegar.*
>
> [EP_Ana_A_I_2]

La respuesta de Ana, aunque breve, sugiere cuestionar sobre lo que sucede en el "*aula*" y que conduce a los estudiantes a asimilar a la estadística como más necesarias que la probabilidad y sobre aquellos elementos que impiden establecer metas claras en los objetos que persigue la probabilidad. Ambas cuestiones, presuponen hablar de significados que viven y construyen dentro de las clases de Ana y que generan distinciones entre la estadística y la probabilidad.

Estas distinciones se hacen evidentes en la forma en que se estructuran las clases en los diferentes bloques. En la de estadística, los contenidos que se abordan siguen un propósito, que es contribuir al desarrollo del proyecto, es decir, cada contenido brinda a los estudiantes herramientas para la concreción del proyecto:

> *…después de los datos hay que pasarlos a ordenados, agrupados, conforme voy explicando el tema ellos en la parte de atrás de su libreta lo iban haciendo con los mismos datos de la integradora, que es como deben de ser la integradora*
>
> [EP_Ana_B_IV_4]

De igual forma, se busca integrar conocimientos herramientas tecnológicas, como es el uso de la computadora y software, que faciliten los procesos, y la transversalidad al proponer proyectos conjuntos con otras asignaturas, tal como lo señala el siguiente fragmento de entrevista:

> *… ya platique con la subdirectora para que me ajuste con otra materia, y nosotros haríamos la parte de estadística, la parte del análisis (conclusiones, razonamientos) qué se le quede al otro maestro*
>
> [EP_Ana_A_I_2]

En cuanto al bloque probabilidad, los contenidos se introducen con la mecánica común que es relacionar la probabilidad con los juegos de azar:

> *Entonces que paso con Erik,… enseña probabilidad con cartas. Llevo varias cartas y les dijo vamos a jugar 21, y les preguntaba ¿cuál es la probabilidad que mi carta este todavía ahí? Y checan las cartas que ya salieron, y ellos checaban sus tablitas. Y con él introduzco la probabilidad*
>
> [EP_Ana_B_II_2]

Así mismo, la forma en que se desarrollan los contenidos de probabilidad tienen el propósito de que el estudiante logre identificar la estructura de las preguntas planteada en los ejercicios que se proponen en clase, y posteriormente elegir una formula o bien estructurar una tabla de contingencia que suprima el uso de la formula como lo muestran los siguientes fragmentos de entrevista

Entrevistador: En estas explicaciones ¿Qué es lo que quieres que el alumno entienda? ¿Cuál es tu prioridad al explicar el tema?
Ana: Por ejemplo, ¿Por qué no es clásica? Porque no sé cuántas veces van al futbol, y que es lo que te están dando, un valor de probabilidad, y que formula podemos utilizar. Más allá no, más allá no, es lo que te decía

[EP_Ana_A_II_2]

La condicionada no la aprendieron como fórmula, sino cómo tipo tabla. Por ejemplo, la probabilidad de mujeres que conducen, miran la tabla estos son los que me piden, estos son todos los que conducen. En la tabla ellos ven un subtotal y lo que te están pidiendo, no la típica formula de B dado A es igual a la intersección de A con B entre B, ellos no lo entiende, ellos entiende este es mi subtotal y este es mi total, y este es el pedacito que me piden.

[EP_Ana_B_IV_2_a]

… es más fácil que lo acomoden en una tabla o en un esquema, que la dichosa formulita. Al final es lo mismo.

[EP_Ana_A_I_2]

Más aun, cuando Ana hizo énfasis sobre la diferencia que hay en los "*proyectos integradores*" que se realizan por cada bloque. Estos proyectos, denominados integradora del bloque, se convierten en estrategias didácticas importantes, debido a que contribuyen a la aplicación de las competencias desarrolladas por los estudiantes en uno o varios bloques a una situación concreta, además, permiten mirar los significados que Ana pretende desarrollar y evaluar en los estudiantes.

Lo que es el primer bloque,…les gusto la integradora ya que debían investigar en una tiendita o algo, y juntar los datos para trabajarlos en Excel

[EP_Ana_B_II_2]

En el segundo que fue probabilidad fue un problemario, y los problemas te los da el libro, no busque otros ejercicios

[EP_Ana_B_II]

En el primer bloque se expuso los carteles y los pegamos en la puerta de la biblioteca. Eran investigaciones de cuantas personas hacen ejercicio al día, de fumadores o no fumadores.

[EP_Ana_B_II]

El problemario (la integradora) del bloque 2, marca los problemas de esta página a esta página, se arman los equipos y entregan.

[EP_Ana_B_II]

En consecuencia, se decidió analizar las integradoras del Bloque 1: Estadística Descriptiva y el Bloque 2: Probabilidad, a fin de encontrar los elementos que distingue, desde la concepción de Ana, a la estadística de la probabilidad, y viceversa.

4.1.1.1. Los significados asociados a la estadística

El Bloque 1, se enfoca en la aplicación de la estadística descriptiva que básicamente consiste en la búsqueda, recolección, análisis y representación de los datos, haciendo uso de gráficos descriptivos, las medidas de tendencia central y dispersión, y tablas para datos ordenados. El proyecto consistía en lo siguiente [Ver Figura 8]:

ACTIVIDAD INTEGRADORA

DESCRIPCIÓN:

En equipos de 5 integrantes entregaran un cartel y un reporte impreso donde presenten la organización de una serie de datos obtenidos de una muestra de la población determinada por la situación contextual seleccionada y los presentaran en forma tabular y grafica; además calcularan las medidas de centralización y de dispersión que le permitirán realizar un análisis pertinente y obtener conclusiones sobre el comportamiento de la población.

Figura 8. MID_1_Ana_B_7
Fuente. Proyecto del bloque 1 de la profesora Ana

En la descripción que se presenta del proyecto se hace énfasis en los contenidos a utilizar, pero no lo que se espera de producto final del proyecto, sin embargo, esto es claro cuando se presenta el apartado de las rubricas de evaluación del proyecto (Figura 9 y Figura 10). Estos aspectos a evaluar resaltan significados asociados a la estadística.

ANALISIS ESTADISTICO

2	Planteamiento de la situación del contexto seleccionado: dar una descripción de la situación contextual elegida
2	Argumentación de la elección de la situación del contexto: se debe justificar los motivos por los cuales se decidió realizar el análisis del contexto seleccionado y con qué fin.
2	Descripción de la población Determina su tipo (Finita/Infinita) y justifica
2	Descripción de la muestra Determina la técnica de muestreo utilizada (Probabilística /No Probabilística) Justifica.
2	Describe en tipo de datos (cuantitativo/cualitativo). Justifica
1	Describe la técnica utilizada para la recolección de datos.
2	Describe y justifica la ordenación de los datos (Ordenados/Agrupados)

Figura 9. MD_1_Ana_B_7
Fuente. Proyecto del bloque 1 de la profesora Ana

PROPUESTAS Y CONCLUSION DEL ANALISIS ESTADISTICO

3	A partir de los análisis antes realizados responde las siguientes preguntas: - ¿Qué proponen para mejorar el contexto elegido con el que trabajaste? - ¿A qué conclusión llegaron respecto a la situación del contexto, después de calcular y analizar todos los valores estadísticos? Este deberá ser entregado como una descripción textual, mínimo 1/2 cuartilla.

CONCLUSION GENERAL

3	Debe responder las siguientes dos preguntas - Desde el punto de vista de la estadística, ¿Por qué consideran importante la organización de la información? - ¿Cuáles fueron sus experiencias al trabajar con una problemática de la vida real? Este deberá ser entregado como una descripción textual, mínimo 1/2 cuartilla.

Figura 10. MD_1_Ana_B_7
Fuente. Proyecto del bloque 1 de la profesora Ana

Basado en lo que la rúbrica de evaluación se infiere lo siguiente: En la parte del *Análisis Estadístico*, se pretende que los estudiantes argumentes sobre la elección del tema, esta argumentación va centrado en sustentar un interés personal o bien problemática, para luego en el apartado *Propuestas y Conclusiones del Análisis* generar una opinión crítica de "mejora del contexto elegido" basado en el resultado obtenido de los datos. En el apartado de las *Conclusiones generales* (Figura 10), se invita reflexionar al estudiante sobre su experiencia en el uso de procesos estadísticos para el análisis de los datos, y cómo estos procesos matemáticos dan cuenta de realidades tan diversas que pueden ser estudiadas y analizadas mediante la estadística.

Por tanto, el énfasis de Ana en la estadística es que los estudiantes aprecien su funcionalidad en la vida real, pues al no delimitar un tema sugiere que los usos de la estadística van desde una atender una problemática hasta algún tema de interés que no necesariamente sea un problema "*De pronto era una investigación de: cuantas personas hacen deporte al día, el otro de fumadores o no fumadores… [EP_Ana_A_1_5*]", y también sugiere que los resultados obtenidos por procesos estadísticos permite tomar decisiones para la "mejora del contexto". Estas dos condiciones son los significados que Ana le asocia a la Estadística, qué es Funcional y contribuye a la toma de decisiones.

4.1.1.2. Los significados asociados a la probabilidad

El Bloque 2, se pretende que los estudiantes hagan uso de la teoría combinatoria y la teoría de probabilidad tanto para generar problemas que hagan uso de estas teorías como para la resolución de problemas. Bajo este enfoque el propósito del trabajo integrado se limita al siguiente

> *Documento realizado en equipos de cinco que contiene dos problemas propuestos y resueltos por ellos, sobre los temas: probabilidad equiprobable, axiomática y condicional; así como la resolución correcta de 8 problemas de los ejercicios II al VI (problemario proporcionado en la guía).*
>
> MD_1_Ana_B_7
> *Fuente. Proyecto del bloque 2 de la profesora Ana*

En cuanto a las rubricas de este proyecto, es menos elaborada en comparación con la integradora de la unidad 1, limitándose a cumplir con el formato del trabajo, limpieza, redacción, buena ortografía y la entrega en tiempo y forma. Asimismo, resaltas ciertas consideraciones del proyecto, que es cierta forma evidencian los alcances que se esperan del proyecto.

1. DEFENSA DEL TRABAJO

El maestro realizará preguntas a cualquier integrante del equipo sobre los procedimientos y la resolución de sus ejercicios o problemas, el cual deberá ser capaz de responder *correctamente*,

En caso de no contestar correctamente el alumno perderá individualmente un valor de 5 pts., por cada problema no explicado sobre el total obtenido.

2. Problemas del Ejercicio I

Los problemas propuestos del equipo deberán ser:

- De carácter propio, en caso de haber dos o más problemas similares en su redacción o procedimiento, se omitirá el puntaje de estos para los equipos.
- Innovadores, la redacción de problema implique una situación cotidiana y creativa.

Figura 11. MD_2_Ana_B_IV_7_a
Fuente: Proyecto del bloque 2 de la profesora Ana

El primer apartado *denominado defensa del* trabajo tienden a resaltar la importancia en la explicación de los procedimientos y resolución de los ejercicios, lo que conlleva a que los estudiantes se enfoquen en desarrollar competencias para identificar el tipo de probabilidad que se propone en un problema de carácter escolar: Sí es una probabilidad para eventos independientes, para eventos dependientes, para condicionada. El segundo apartado, *Problemas del Ejercicio I*, se propone la construcción de un problema (en la entrevista se señala que son dos) que aborde alguno de los tipos de probabilidad vistos durante clases. Al respecto, Ana añade lo siguiente:

> *… es muy común encontrar que los problemas que proponen los jóvenes sean muy parecidos a los del libro, que solo le cambien los valores, los nombres y se sea de un tipo de evento. Muy similares a la del libro, pero ellos lo hacen para no fallar en el puntaje*
>
> [EP_Ana_B_I]

El comentario de Ana demuestra la falta del dominio probabilístico de los estudiantes aun para la construcción de problema escolar de probabilidad. La incertidumbre, característica fundamental de los procesos probabilísticos es subestimada y se sobreestima el desarrollo algorítmico de la resolución de problemas y el carácter determinístico de estos. Cabe señalar que un enfoque de la matemática basada en la resolución de problemas no es la parte deficiente sino el tipo de interpretación que se ha hecho del enfoque. Desde la perspectiva de la enseñanza basada en resolución de problemas, se deben generar situaciones simuladas que modelen los fenómenos que se desean estudiar, en este caso la probabilidad; si este fuera el caso, los problemas que se proponen como parte de la integradora deberían proponer la incertidumbre como elemento indispensable para el desarrollo del pensamiento probabilístico, esta condición no solo permite mirar a la probabilidad como el grado de certidumbre sobre un fenómeno, sino a tomar decisiones sobre el mismo, y también a elegir el tipo de proceso probabilístico necesarios para cada situación a la que se enfrente. Por último, la cotidianeidad en la que se desenvuelve la probabilidad no responde preguntas de carácter escolar cómo se da en este proyecto, o bien son centradas en contexto de juegos de azar.

En consecuencia, Ana asocia a la probabilidad con procesos determinísticos y de carácter meramente escolar, esto último se refiere a rezagar a la probabilidad a un contenido de un currículo que se necesita cubrir en un periodo determinado. Estos significados son los que imposibilitan a los estudiantes ver la utilidad de la probabilidad en la vida cotidiana, alejan los procesos probabilísticos de la incertidumbre, y centra los conocimientos en el desarrollo de estrategias algorítmicas para obtener una respuesta, y no se centra en el análisis de la probabilidad obtenida.

4.1.1.3. Contraste entre los significados dentro de los estocásticos

De acuerdo con el análisis de los apartados *4.1.1.1* y *4.1.1.2*, se obtiene la figura 12. En ella se hace referencia a que el CDC fue el medio que nos contribuyó a distinguir tanto los conocimientos del contenido a enseñar, como la de su didáctica específica. El conocimiento del contenido a enseñar se caracterizó a la estadística Descriptiva como Funcional y a la Probabilidad como Escolar, la funcionalidad en términos de lo que se percibe es la utilidad para el análisis de los datos, contrario a la Probabilidad que se presenta solo como una necesidad presente solo en el contexto educativo. Otro significado es la toma de decisiones y el determinismo, que están relacionados con el conocimiento de la didáctica del contenido a enseñar, es evidente que Ana quiero conducir a la Estadística Descriptiva como aquella que coadyuva en la toma de decisiones, en términos de ella para mejor la situación de donde se obtuvieron los datos, y por otro la Probabilidad es vista como algoritmos, formulas, tablas de contingencias y aplicaciones de los tipos de probabilidad, sin centrarse el análisis de la probabilidad obtenida o bien cómo esta probabilidad afecta a la situación de donde proviene.

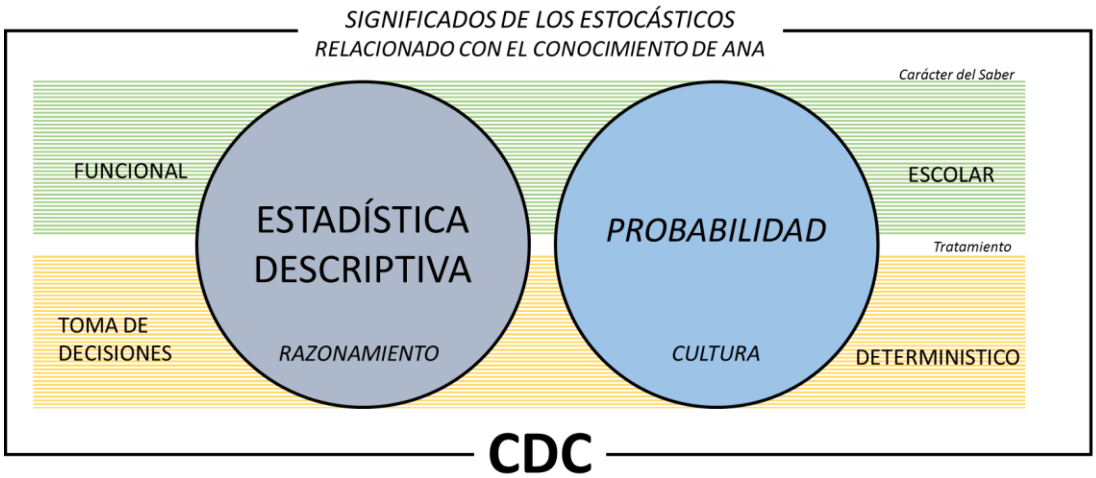

Figura 12. Ana y los significados relacionados con los estocásticos

Los significados asociados a la Estadística Descriptiva y a la Probabilidad determinan también el tipo de dominio de los estocásticos. En cuando a la Estadística Descriptiva los significados tienen la intensión de que los estudiantes adquieran un dominio de razonamiento estocástico, aunque en este nivel es necesario que los estudiantes también sean capaces de elegir el tipo de procedimiento estadístico acorde a los datos analizar; condición que la actividad integradora limita al exigir a los estudiantes que realicen el cálculo de todas las medidas de tendencia central y dispersión, y realizar todas las gráficas, lo que impide que sean capaces de razonar sobre aquellos procesos estocásticos de acuerdo a los datos, las condiciones y los resultados que se desean mostrar, así mismo, esta toma de decisiones no enfatiza que esta toma de decisiones es bajo circunstancias de incertidumbre, cuyo resultado no es favorable o desfavorable sino que comunica las condiciones en las que se debe tomar una decisión. En cuanto a la probabilidad, los significados conducen a un dominio de cultura estocástica, limitando al uso de procedimientos probabilísticos, identificación del tipo de problema a responder y falta de análisis de los resultados.

4.1.2. Los significados asociados al teorema de Bayes

Estos significados de la probabilidad permean la forma en que se aborda el Teorema de Bayes, de carácter escolar y con tratamiento determinístico. Tal es el caso del siguiente comentario de Ana que conjuga la distinción en el tratamiento que se ofrece en el aula y la supresión de la fórmula para los diferentes tipos de probabilidades.

… pero sí probabilidad lo ven de otra forma, condicional no lo ven con la formula tienen que ver sus subtotal y que es lo que me piden, Teorema de Bayes no lo ven con la fórmula

[EP_Ana_B_IV_6]

En el comentario, parece ser que el Teorema de Bayes forma parte del concepto de probabilidad de Ana , pues se establece una relación lineal entre la descripción del tratamiento de la probabilidad y la ejemplificación con la probabilidad condicionada y el Teorema de Bayes; es posible que esta conjunción no considere la naturaleza epistemológica del carácter subjetivo e inverso del teorema y por el contrario premie el carácter frecuentista y directo que sostienen los otros tipos de probabilidades con los que se le relaciona.

Para ello el Análisis se centró en dos partes, la primera de aquello significativo que Ana menciono en la Entrevista a Profunda y las reflexiones basadas en la solución del Problema

4.1.2.1 Los significados del Teorema de Bayes en la Entrevista a Profundidad.

El siguiente fragmento de entrevista proporciona una explicación del conocimiento de Ana que le permite abordar el teorema de una forma particular. En él se trató de distinguir qué significados le ha asociado al Teorema de Bayes que permite encajarlo en su concepción de probabilidad.

Entrevistador: Por ejemplo, en el tiempo que has enseñando el teorema de Bayes ¿cuál ha sido el propósito de su enseñanza?, es decir, ¿cuál es el problema que tratas de resolver con la enseñanza del teorema de Bayes?

*Ana: Del teorema de Bayes no sé, tendría que estudiar ahora no se, tendría que estudiar para lucirme… ¿cuál es el teorema de Bayes, son la de varios eventos y varios son condicionales? (*Ana revisa su guía didáctica*)*

Entrevistador. ¿Cuáles son las dificultades con las que te has topado a la hora de enseñar en teorema de Bayes?

*Ana: La fórmula no se las doy, mejor les enseño el esquema (*señala la página de la guía didáctica*), cuando le doy varios eventos, este sí, este sí, este sí, ¿cuál es el que nos están pidiendo? La primera, la primera entre todas las posibles, la formula jamás se las pongo.*

Entrevistador: ¿por qué no les enseñas la formula?

Ana: Porque esta horrible, está muy larga. Sólo con verla el alumno dice no ¡qué flojera como voy a sustituir tal cosa! es más fácil que lo pongan en un esquema todas las posibles así tal cual nos están pidiendo.
Me acuerdo que en un examen de la SEP estaba el típico de las máquinas. Creo que todavía la conserva, te dan tres máquinas… defectuosos o no defectuoso, de hecho terminamos mostrándola como condicional pero alargada, o sea es una condicional con más eventos, así se los planteas.
De hecho, al final del bloque II, nos piden hacer un esquema de cómo se diferencia cada uno: la clásica lo ponen como el más fácil, me dan los datos y sólo sustituyo, axiomática ellos ponen la formula, condicional ocurre un evento antes, Bayes varías condicionales pero me piden un evento en particular.

Entrevistador: ¿Qué otras dificultades existen en el teorema de Bayes?

Ana: La fórmula no la veo, (recuerda) el teorema de Bayes te dan los porcentajes, y ellos saben que tienen que correr dos decimales, pero si le dan el 1% para ellos es 0.10, dificultades no tanto en lo que es probabilidad sino de pronto de conceptos básicos, y cuando tienen que completar los esquemas, el problema de que son 40 personas y 1/5 son hombres y el resto son fracciones, un 1/5, eso les da dificultad, dáselos masticado, son dificultades es operaciones básicas. Pero si, la formula, de hecho yo les digo que no la vean, ni siquiera yo la entiendo, no lo veo

Entrevistador: ¿Qué hay que considerar para resolver un problema del teorema de Bayes?

Ana: Los casos, que los dividan por grupos (hombre-mujeres, defectuosos-no defectuoso, cantidad de empresas, etc.) y de los grupos cuantos elementos son, así como va el problema lo van dividiendo. El tema se ve en un día; un día lo explico y el otro (ellos) hacen los problemas, o sea, no abordo tanto en ello.

[PT_Ana_A_1_V_4_a]

De las afirmaciones de Ana podemos hacer énfasis en algunos significados preliminares asocia al teorema de Bayes:

- Es una generalización de la probabilidad condicionada. Para que Ana pueda recordar el teorema, recurre asociarlo con la probabilidad condicionada, y este puente señala una generación "*Muchos eventos y todos de tipos condicionales*"

- La complejidad de la formula. Las afirmaciones de Ana en un principio señala la falta de ciertas nociones de probabilidad sintetizadas en la fórmula, que debido a la matematización del Teorema se necesita una reflexión sobre ella.
- Una técnica para el cálculo de probabilidad: Nuevamente se hace menciona que la razón de enseñar el teorema, es motivado por la necesidad del cálculo de probabilidad. Esta idea es reforzada por el la supresión de la fórmula para establecer un mecanismo que facilite el cálculo de la probabilidad y cuando señala que otras dificultades que se establecen en su enseñanza es la asignación de probabilidades a cada partición del espacio muestra, ambas sugieren un tratamiento meramente algorítmico, sin llevar a la reflexión sobre los resultados que se obtienen.

4.1.2.2 Los significados del Teorema de Bayes y la resolución del problema.

En este segundo momento las afirmaciones de Ana fueron más significativas, algunas fueron reafirmadas y otras fueron más claras cuando se reflexionó sobre el teorema de Bayes, asimismo se presenta la hoja de las respuestas de Ana [Figura 13]

Entrevistador: ¿Podrías explicarme cómo hiciste para resolver el problema?
Ana: Según yo, no es solo Bayes, son varios… Mi primer grupo son los que tienen cáncer: 0.8 si tienen cáncer, el resto no tiene cáncer, el segundo grupo son la mastografía y necesito checar que elementos me dan, si son positivas o negativas con respecto al primer y segundo grupo, que son los que no tienen cáncer…
Se sabe que el 0.8% por ser mujeres adultas pueden tener cáncer de mama, el resto que son 99.2%... Entonces sí una mujer tiene cáncer de mama hay un 90% de que tenga una mastografía positiva, el segundo grupo negativa, significa que el otro grupo es el 10%...En otro (grupo) el 7% es positivo entonces no tienen cáncer de mama, y una mastografía negativa de 93%

a) Si una mujer tiene cáncer, o sea ya sucedió así lo veo ¿cuál es la probabilidad que tenga una mastografía negativa? O sea el 10%, pues me estas preguntando lo que ya paso
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una mastografía positiva? Hay dos casos, que tenga cáncer o que no tenga cáncer y dio positivo. El 0.8 es lo que me estaba confundiendo, según yo (0.008) (0.90) y (0.992) (0.07)
c) Si tiene mastografía positiva, entonces, son estos dos, que probabilidad

hay de que tenga cáncer, de estos dos me estás pidiendo solo este, uno de los dos casos. Mis dos casos son como el subtotal, los dos casos los tenía antes, entonces este es mi subtotal (señala el b)) no todo, de lo que me estas dado hacia donde lo reduzco, y ¿qué me estas pidiendo? Sólo uno de los dos, solo uno de los dos voy a repetir arriba, ya me dio el resultado.

[PT_Ana_A_IV_3]

Entrevistador: ¿cómo identificaste cada caso?
Ana: Eso es todo muchacho porque siento que no podría responder…Casi siempre cuando es teorema de Bayes te dan un elemento antes. Es que no lo identificas como es de Bayes, este es tal, sino simplemente dices:

a) Para el primero esto ya sucedió, si quieres que te dé el nombre, esto es condicional, entonces eso ya paso, eso no lo puedes cambiar la mujer tiene cáncer ya sucedió. Entonces cual es la probabilidad de que sea una mastografía positiva; me estas preguntando sólo de este, no se relaciona con los demás elementos
b) Tengo una mastografía positiva, pero no me dices más, de hecho podría decir 90+7=97, pero depende de lo que paso antes, me imagino que son dependientes no dependientes, sino que sucede este caso, de este y de este caso.
c) Y el tercero es Bayes, porque me estás dando lo que ya paso y 1, casi siempre el último, y vez, paso el último quieres saber el anterior.

[PT_Ana_A_IV_2]

Entrevistador: Pero ¿por qué pensar en sólo dos eventos? Es Decir, si tienes cáncer cómo sé que el siguiente conjunto es que no tenga cáncer
Ana: ¿Qué hay otra más? ¿Cómo? Que tenga y no tenga cáncer, cáncer a medias, como la moneda, que pueda caer levantadita. No se es un paradigma que ya tienes.

[PT_Ana_A_IV_2]

Entrevistador: En el a) ¿Por qué no multiplicaste el 0.8% por el 10%?
Ana: Porque ya tiene cáncer la mujer, o sea ya paso el evento, es cómo ¿por qué no lo hizo? Si ya tiene cáncer ya sé que ya paso, ya no es con respecto a esto, y en él b) no sé

[PT_Ana_A_IV_1]

Ana: No sé explicarlo, no sé decirles esto es por esto, o sea no se llegar al concepto, creo que me estoy volviendo muy empírica en esto
Entrevistador: ¿por qué empírica?
Ana: Porque no les doy los conceptos, no les digo recuerden Bayes, recuerden esto. Ellos con lo único que se quedan es que la probabilidad es casos favorables, entre casos posibles. Y con base en ello manejan todo… El problema es que

> *yo no recuerdo los conceptos, me quedo con uno y es todo es favorables entre posibles, favorables entre posibles.*
>
> [PT_Ana_A_IV_3]

> *Entrevistador: ¿entonces cómo puedes distinguir a Bayes de la condicional?*
> *Ana: Que primero tiene que suceder esto, y luego esto, no puede ser antes (Bayes); a diferencia de este no tiene que suceder porque ya paso (condicionada)*
>
> [PT_Ana_A_IV_1]

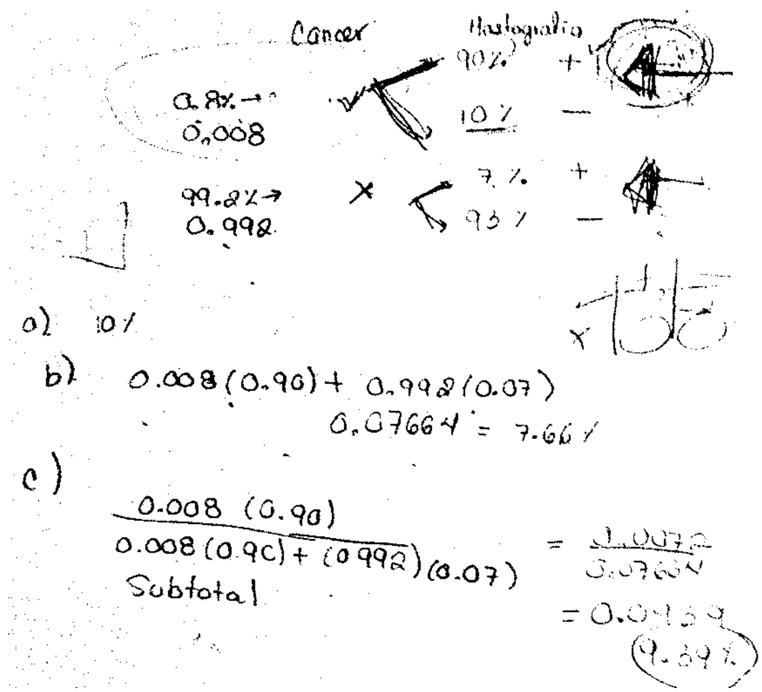

Figura 13. Hoja de resultados de la profesora Ana.

Con base en las reflexiones de Ana sobre su respuesta al problema propuesto y en contraste con lo obtenido en la entrevista se obtiene la siguiente tabla

Tabla 11.
Nociones de Ana sobre la forma de Resolver el teorema de Bayes

Nociones de Ana	Descripción de la afirmación
1) Diferencia en la forma del cálculo de probabilidad	En un primer momento se infiere que Ana no logra distinguir la diferencia entre la probabilidad clásica, condicionada, total y el Teorema de Bayes, pero en la explicación del ejercicio queda claro que Ana tiene nociones de que en Bayes siempre sigue una estructura "*me estás dando (pidiendo) lo que ya paso… quieres saber lo anterior*". En cierta forma, Ana sabe que la diferencia entre Bayes y Condicional radica en que el cálculo de la probabilidad pretende está relacionado con

	buscar una causa que originó dicho resultado, siendo esta práctica la que genera la noción de la probabilidad inversa.
2) El teorema no es una generalización de la probabilidad condicionada. Ana sugiere que	Se reconoce que el Teorema usa la probabilidad condicionada en el cálculo, pues la búsqueda de la causa sugiere que lo ya ha ocurrido está condicionado por un evento anterior, por tanto, la probabilidad es dependiente. Cabe señalar que Ana no menciona que lo que realmente se calcula es una probabilidad conjunta en términos de dependen de eventos. Por ello la multiplicación de las probabilidades.
3) El objetivo es un cálculo de probabilidad.	El proceso tiene por objetivo responder una pregunta, pero no existe una reflexión sobre el resultado, ¿qué nos quiere decir esta probabilidad? ¿Qué nos comunica? ¿Cómo podemos utilizar este resultado? Estas cuestiones ponen de manifiesto la incertidumbre y completa la práctica que hace referencia al teorema y a cualquier tipo de probabilidad. [Ver figura 8]
4) No se aprecia una distinción clara entre la probabilidad condicionada y el Teorema de Bayes	En el discurso sobre la probabilidad condicional y el teorema de Bayes presentan una discrepancia entorno a las nociones que subyacen en este tipo de probabilidades y la probabilidad misma. Esto es debido a que en la probabilidad se trabaja con el supuesto de que algo podría ocurrir y por tanto se calcula una probabilidad la cual nos comunica el grado de certidumbre que tenemos respecto a que un evento pueda ocurrir de cierta forma. En el caso de la condicionada se condiciona un evento futuro a una causa específica, lo que nos comunica la probabilidad de que algo pueda ocurrir bajo ciertas condiciones. En el de Bayes, el pensamiento es inverso, pues algo ya ha ocurrido, y por tanto, deseamos saber cuál es la probabilidad de que haya ocurrido bajo determinadas condiciones. Esto hace que podamos hablar de un supuesto o de una realidad con la que estamos lidiando. En ambos casos, esta distinción no es clara en el discurso de Ana.
5) La subjetividad está presente, pero no es considerada	Cuando Ana establece las particiones, señala que es el paradigma el que hace que se elijan esos grupos, esta parte apunta al grado de subjetividad que contienen este tipo de probabilidad, aunque al parecer no es percibido por Ana

6) La probabilidad de Bayes es una probabilidad simple.	El propósito de Ana, en su forma de mirar la probabilidad de Bayes, es conducir a los estudiantes a que identifiquen Casos favorables entre Casos posibles (forma laplaciana de la probabilidad clásica), en esencia es lo que Bayes y Laplace establecen en la fórmula que conocemos.

En consecuencia, la perspectiva que Ana tiene de la probabilidad permea los significados asociados al Teorema de Bayes, y este se reduce a un tipo de probabilidad clásica, que hace uno de la probabilidad clásica, y que a diferencia de este, los sucesos condicionados están dentro de una partición del espacio muestra en la figura 14. Esta forma de mirar la probabilidad hace posible la conjunción de los diferentes tipos de probabilidades.

Es importante mencionar, que en esencia la perspectiva de Ana es meramente determinístico y la incertidumbre no se discute, no se menciona, no se cuestiona y no se deba en ninguno de los casos.

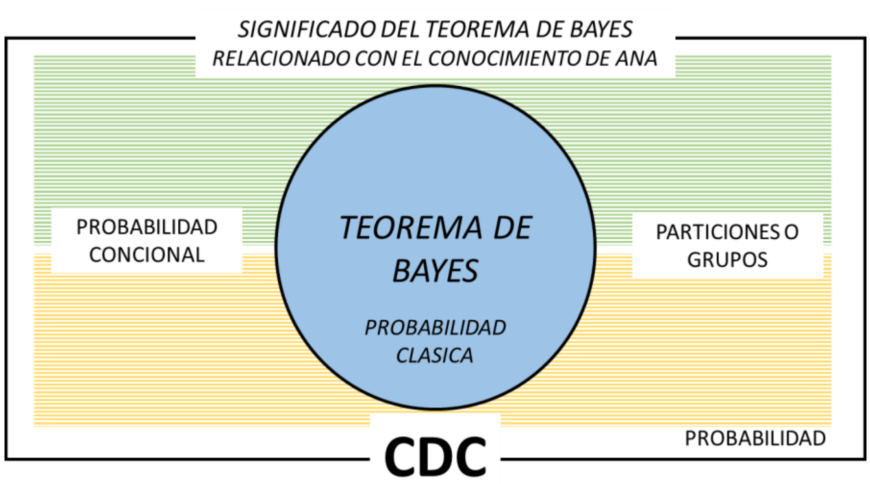

Figura 14. El significado del teorema de Bayes

4.1.3. La propuesta de enseñanza del Teorema de Bayes.

Tomando como ejemplo el problema propuesto, Ana nos explica la forma en que ella enseña a los estudiantes a resolver un problema que involucre el teorema de Bayes.. A todo este apartado lo clasificamos como [EP_Ana_B_IV_6], a continuación se describen los pasos a seguir y los argumentos que ofrece la profesora Ana para su resolución

Se sabe el que 0,8 % de las mujeres adultas pueden tener cáncer de mamas. Si una mujer tiene cáncer de mamas, hay un 90 % de probabilidad que tenga una mastografía positiva. Si una mujer no tiene cáncer de mamas, todavía existe un 7 % de probabilidades que tenga una mastografía positiva.

1. *Si la mujer adulta va al control anual y tiene una mastografía positiva ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cáncer de mama?*

1. Identificar grupos priorizando

Ana: Mi primer grupo son los que tienen cáncer: 0.8 si tienen cáncer, el resto no tiene cáncer, el segundo grupo son la mastografía y necesito checar que elementos me dan, si son positivas o negativas, con respecto al primero grupo y con el segundo grupo que son los que no tienen cáncer.

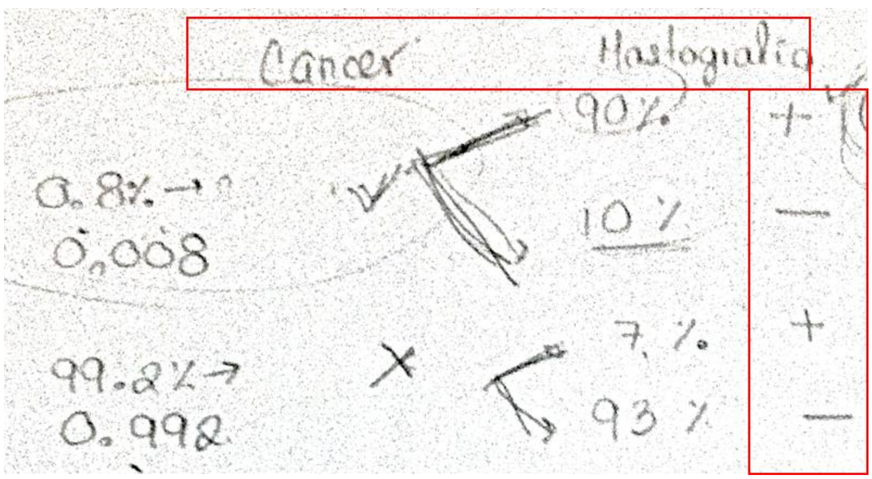

Figura 15. Identificación de los grupos que componen las particiones

2. Desglosar el esquema y completarlo

Ana: Se sabe que el 0.8% por ser mujeres adultas pueden tener cáncer de mama, el resto que son 99.2%, por eso te pregunte si era 0.8 u 8%, Entonces, si una mujer tiene cáncer de mama hay 90% de que tenga una mastografía positiva el segundo grupo negativa, significa que el otro elemento significa que es negativa que es el 10%...En otro 7% positiva entonces no tiene cáncer de mama mastografía negativa 93%

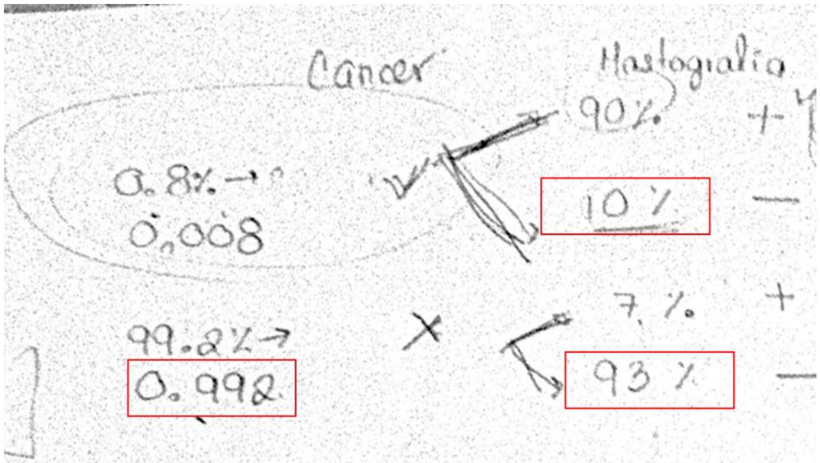

Figura 16. Asignación de las probabilidades a las particiones

3. Identificar cuales tienes, y de ellos cuales necesitan

Ana: Y mi tercer paso es lo que me piden, me están pidiendo mastografía positiva, es decir, señalar lo que ya sucedió, es decir esto son los casos posibles, y de los dos posibles, señalar también el caso favorable de lo que me están pidiendo.

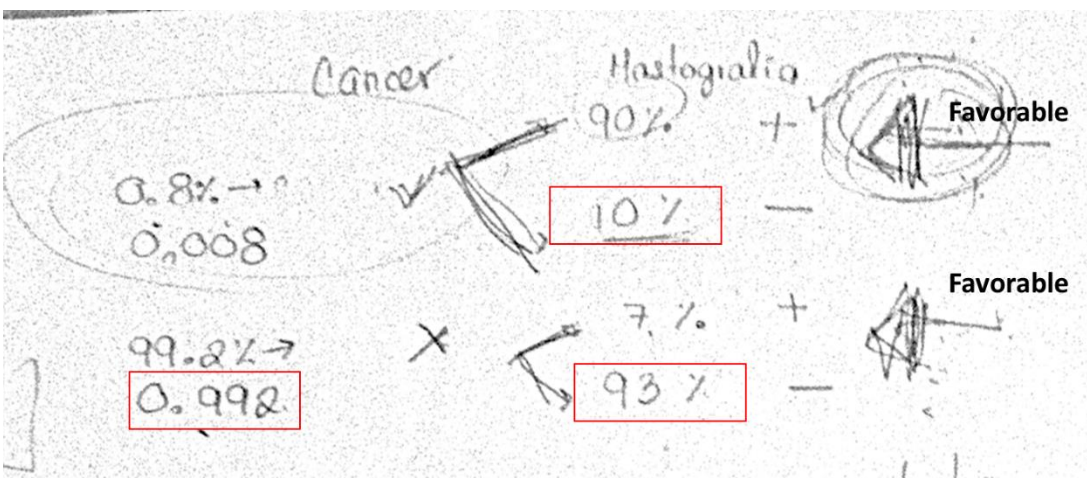

Figura 17. Establecer las relaciones de probabilidad

4. Aplicar la fórmula de probabilidad clásica.

Ana: mis dos casos son como que el subtotal,…, entonces este es mi subtotal no todo, de lo que me están dando hacia donde lo reduzco, hacia esta parte, y que me están pidiendo, solo uno de estos dos, solo uno de los dos voy a repetir arriba, y ya me dio el resultado

$$\frac{Casosfavorable}{Casos\ posibles} =$$

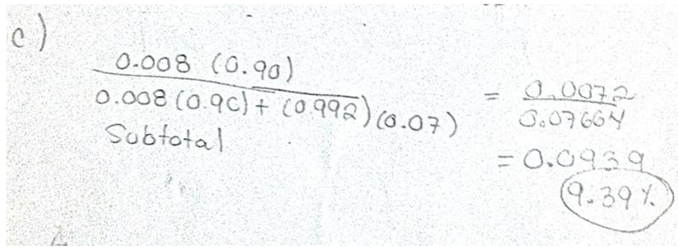

Figura 18. Reducción del teorema de Bayes a una probabilidad clásica

En esencia Ana realiza la explicación de aquello que considera relevante para solucionar este tipo de probabilidades, en ella se presuponen que los estudiantes comprenden el porqué de la multiplicaciones en los subtotales y en el caso pedido, debido a la secuencia de los temas establecidos el currículo; no se discuten las particiones ya que se considera que es lo más lógico a suceder, la subjetividad y la incertidumbre no son enfatizados en este tipo de probabilidad; se hace énfasis en considerar aquello que ya paso para los casos favorables y aquello que desea saber para el subtotal, siendo este algoritmo lo que hace diferencia entre Bayes y la probabilidad condicional.

Es de notar que debido a esta forma de concebir la probabilidad, las clases de Ana se reducen a mostrar cómo desarrollar el esquema, y realizar los procedimientos necesarios para ejecutarlo de la mejor manera

Entrevistador: ¿Tienes algún método para enseñar el teorema de Bayes?
Ana: Checo el ADA (los ejercicios que propone la guía didáctica), elijó los ejercicios que considero complejos, y les comentos a los estudiantes que ellos chequen los ejemplos que propone el libro porque son similares... Elijo los ejercicios, uno que sea base, y el otro que me den un elemento de un grupo pro ejemplo en fracción para enseñarles cómo se hace. Uno como que es base y el siguiente es cómo hacerlo.
De ahí, la estructura y cómo se acomoda la información. En el examen solo cambio los números (refiriéndose a los datos), porque sí no luego se quejan de que uno es más difícil que otro.

[EP_Ana_B_IV_8]

4.2. El caso de Enrique

Enrique es un profesor noble, tan sólo ha colaborado dos instituciones. En la institución que se encuentra actualmente, es en la que se ha desarrollado con mayor tiempo impartiendo las clases de Matemáticas para segundo y tercer año.

Entrevistador: ¿Cuánto tiempo llevas como profesor de matemáticas?
Enrique: …Llevo dando clases en grupo como 2 años

Entrevistador: ¿En qué niveles has dado clase?
Enrique: ¿En qué niveles?, sólo he dado en nivel medio superior, me desenvuelvo más en el NMS

[EP_Enrique_profesor_3]

La forma en que Enrique ingreso a la institución, es debida al acercamiento que tuvo al realizar su servicio social. Durante ese tiempo mostro dedicación a la labor docente, y formo parte del grupo de asesoramiento personalizado para estudiantes que tienen problemas con matemáticas. Al año siguiente de graduarse de la licenciatura, fue contactado para formar parte de la planta docente.

… Yo hice mi servicio social en la prepa donde estoy,…y de ahí en director me invito a formar parte del grupo académico para dar clases de Matemática 3 y Matemáticas 5.

[EP_Enrique_profesor_10]

Seis meses antes de ingresar a dicha institución él trabajó en una escuela privada, esta etapa no la incluye como parte de su experiencia docente pero si la menciona para hacer referencia en cuando a su preparación, ya que en esa institución le permitió participar en curso y talleres que le brindaron herramientas en la parte administrativa y de planeación educativa.

En cuanto a cursos y talleres, solamente he participado en congresos y uno que otro taller. Por ejemplo, en la escuela que trabajaba anteriormente, es una privada afiliada a la UNAM, y exigían a los maestros a tomar mínimo dos cursos anuales; por ello tome un curso a distancia de planeación educativa… te enseñan hacer planes de clases semestrales o anuales para que lleves un control… ¿qué otro curso tengo llevado? Los que imparten en la institución donde laboro, discriminación de resultados, se aplica la estadística para saber qué tan bien estas elaborando tu examen y si estas evaluando lo que debes. ¿Qué más he llevado? Congresos, pláticas y tallercitos acerca de lo que se hace en matemáticas, en sí en probabilidad y estadística no.

[EP_Enrique_profesor_2]

La institución donde labora Enrique tiene objetivo sobre lo que se espera del aprendizaje de los alumnos, y por ende del trabajo de los profesores. De forma particular, Enrique ha fortalecido los objetivos con la visión que tiene respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El objetivo que nos impone la dirección es sacara los muchachos adelante. Ahora estamos tratando de reducir el número reprobados que hay, pero no podemos

pasarlo en los extraordinarios o hacer más fácil los temas que se va, sino de buscar estrategias para cambiar la problemática que tenemos.
Otro problema son los resultados de nuestros estudiantes en la prueba PLANEA, la mayor preocupación es que nuestros muchachos no comprenden los textos que leen y en matemáticas solo mecanizan. Estamos trabajando en cambiar eso.
En cuando al programa interno de la escuela, estamos interesando en quitar la parte clásica de la enseñanza y buscar cómo construir aprendizaje

[EP_Enrique_profesor_5]

Entrevistador: ¿A qué te refieres con la parte clásica de la enseñanza?
Enrique: Pararse y ponerse a explicar, luego marcarle muchos ejercicios a los estudiantes
Entrevistador. ¿Qué implica para ti como profesor?
Enrique: Requiere planear mis clases, buscar ejercicios adecuados para que ellos lo comprendan, es decir, trazar un camino para que los muchachos vayan construyendo su aprendizaje… que conceptualicen…

[EP_Enrique_profesor_7]

La institución está interesada en mejorar el aprendizaje de los estudiantes, permitiéndole a sus profesores empleen las estrategias, que según su perspectiva profesional, coadyuve al logro de los objetivos: reducir los índices de reprobación y obtener resultados satisfactorios en la prueba PLANEA. Por su parte, Enrique considera que para mejorar el aprendizaje es necesario cambiar el paradigma de enseñanza clásico a una forma basada en la construcción del aprendizaje denominado conceptualización.

En cuando al trabajo académico, Enrique forma parte de la academia de Estadística y Probabilidad, que está conformado por 12 profesores, quienes discuten y reflexionan sobre los retos de estos objetivos y generan propuestas que fortaleza esta forma de concebir la enseñanza, sin embargo la academia aunque es un medio de dialogo, también deja la libre catedra a cada profesor para tomar las decisiones pertinentes según el características muy particulares

En la academia realizamos planes de clase, pero cada quien hace lo necesario. Por ejemplo, yo hago mi plan, veo que tipo de grupo tengo y elaboró un plan para el grupo, si veo que el primer periodo les fue mal, digo "¡Tengo que cambiar mi estrategia!", revisó, me autoevaluó, le pido a los estudiantes que me evalúen, ¿qué es lo que hace falta, qué cambia?

[EP_Enrique_profesor_8]

En cuanto a su experiencia docente en la asignatura de estadística y probabilidad, ha impartido el curso dos veces, señalando que su perspectiva de la enseñanza de la estadística y probabilidad ha evolucionado. La diferencia más notable es el cambio de paradigma del aprendizaje de un enfoque clásico a un enfoque basado en la construcción del conocimiento.

> *Ya son dos generaciones. … El primer curso que di de probabilidad no me gustó tanto, no tenía bien planeado, utilice el libro que da la UADY para enseñar probabilidad en bachillerato y el libro de torres león, pero no me gustó tanto el enfoque era más clásico. Ahora cambien eso, trate de relacionarlo con la vida laboral, y situaciones de la vida real.*
>
> [EP_Enrique_profesor_9]

Esto último señala que Enrique ha interactuado con los estocásticos en dos momentos, y que debido a el enfoque que en ha adoptado para la enseñanza, han modificado su discursos y sus métodos de enseñanza. Esta reformulación del curso señala que se han construido nuevos significados; al parecer estos significados tienen que ver con la aplicación del conocimiento en la vida laboral y en situaciones de la vida real.

El comentario de Enrique sugiere que a partir de la interacción con los estocásticos bajo un contexto de enseñanza, el profesor puede hacer modificaciones de acuerdo a su enfoque de aprendizaje que se adopte. A manera de ejemplificar, hay dos momentos en el comentario de Enrique: En un primer momento se encuentra dando clases de estadística y probabilidad, tiene los conocimientos que como LEM son parte de su formación profesional, pero al enfrentarse a contexto escolar "*no lo tiene bien planeado*", es decir, hace falta la forma de traducir esos conocimientos a conocimientos que sean enseñables y para subsanar esta situación hace uso de los libros de texto, una práctica común de los profesores noveles. En un segundo momento, Enrique ya conoce el contexto, sabe que requiere de un conocimiento que le haga enseñable eso que conoce y que se necesita enseñar, además que le permita cambiar el enfoque clásico de enseñanza, más que darle un recetario o formulario de estadística y probabilidad

4.2.1. Los significados asociados a los estocásticos

En cuando al significado relacionado a los estocásticos, Enrique no hace una distinción entre la estadística y la probabilidad, y se centra en hablar de forma general de ambos. El fragmento de entrevista sugiere el significado que se le otorga a la estadística y la probabilidad.

Entrevistador: ¿Existe una diferencia entre el curso de Estadística y Probabilidad y otro cursos de matemáticas?
Enrique: Por ejemplo, sabemos que el curso de Matemáticas IV es algo exacto, es algo preciso que nos sirve en física y otras materias, pero probabilidad (incluida la estadística) es una ciencia que estudia lo aleatorio. Entonces comparar entre algo exacto y algo cercano a algo con lo cual se pueda tomar una decisión, es completamente diferente para los muchachos, algunos lo ven más light y otros más difícil porque les cuesta mucho trabajo pensar en ese tipo de problemas

[EP_Enrique_A_I_1]

Por ejemplo, en el bloque de estadística cuando vemos las medidas de tendencia central y de dispersión, me centro en la toma de decisiones para un problema que tenga la misma media. Igual vi utilizo uno que es aplicado a la ingeniería, sobre la elección de un tipo de material que sea resistente, en eso tomas la que tenga mayor variabilidad para que resistas. Estos ejemplos lo vemos en clase, no en el examen porque ahí estamos evaluando ejemplos básicos

[EP_Enrique_B_I_1]

Enrique menciona que si logra identificar una diferencia entre aquello que se aborda en la Estadística Descriptiva y la Probabilidad y lo que se atiende en otros cursos de Matemáticas, en esta asignatura requiere que los estudiantes sean capaces de tomar una decisión bajo cuestiones de aleatoriedad, lo que resalta una noción de incertidumbre, comparado con lo exacto, o más bien determinístico de las otras asignaturas. Por otra parte, los ejemplos que mencionan tienden a resaltar la aplicación de los estocásticos bajo diferentes ambientes de desarrollo profesional, haciendo que estos conocimientos sean aplicables funcionales en la toma de decisiones.

Lo que es de notar, en las afirmaciones de Enrique es la conjunción que hace de la Estadística y Probabilidad, aunque ambas son de carácter distinto, logra establecer una misma naturaleza lo funcional, y la de toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre (Ver Figura 19).

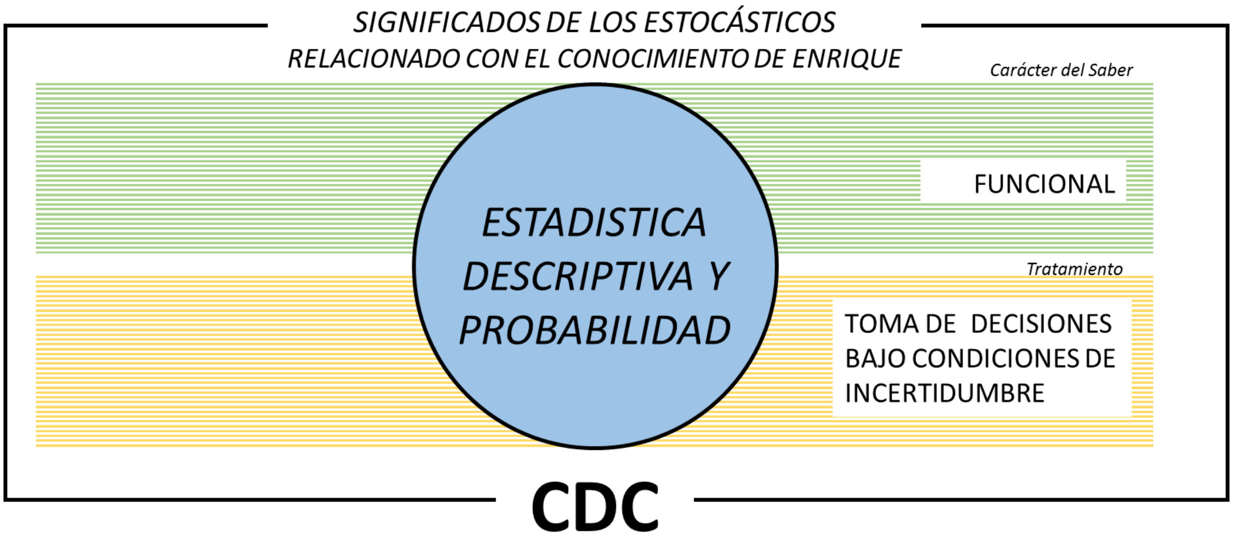

Figura 19. Los significados asociados a los estocásticos del conocimiento de Enrique

Debido a la limitante de elementos para contrastar lo dicho en estos fragmentos de entrevista, no es posible decir si el dominio que considera desarrollar Enrique en una clase de Estadística y Probabilidad es de cultura, razonamiento o pensamiento estocástico. Por tanto, el diagrama se limita a los elementos presentes en las afirmaciones del profesor, y se deja esta cuestión para discutir posteriormente con los otros resultados.

4.2.2. Los significados del Teorema de Bayes

En cuanto al Teorema de Bayes, la entrevista profunda brindo evidencia de los significados que Enrique considera relevantes que el alumno comprenda para la conceptualización. En un primer momento durante la entrevista cuando se discutía sobre cuáles eran los temas o momentos más difícil del curso, Enrique afirmó lo siguiente:

> *… mejor dicho más importantes del curso creo que son la probabilidad clásica y la probabilidad condicionada. Sí el alumno comprende la probabilidad clásica y condicional, puede entender lo que es un evento dependiente, puede resolver el teorema de Bayes de forma axiomática.*
>
> [EP_Enrique_A_I_3]

En este primer comentario, pareciese ser que en la concepción de Enrique el teorema de Bayes es una convergencia de los diferentes tipos de probabilidad, y que en su apreciación, este requiere que el alumno haya conceptualizado la probabilidad clásica y la probabilidad condicional. Por tanto, es necesario centrarnos en estos significados que le hacen suponer a Enrique tal necesidad a la hora de toparse con la probabilidad inversa.

4.2.2.1 Los significados del Teorema de Bayes en la Entrevista a Profundidad.

En los siguientes fragmentos de entrevista, presenta algunos fragmentos que se analizan sobre el teorema de Bayes, a fin de distinguir los aquellos significados que son parte del conocimiento de Enrique.

Entrevistador: Y El teorema de Bayes ¿En qué bloque está ubicado?
Enrique: Es el último antes de las distribuciones aleatorias
Entrevistador: ¿Por qué crees que está ubicado ahí?
Enrique: Porque junta todos los demás temas de probabilidad, todo converge en ese tema. Se aplica la probabilidad clásica, condicionada, axiomática y la dependencia de eventos

[EP_Enrique_A_III_I_1]

Entrevistador: ¿Lo podrías ver en otro momento?
Enrique: yo creo que sería muy forzado, tal vez con solo la probabilidad Clásica, de todas maneras hay como que ciertas nociones al momento de planearlo Por ejemplo, se podría utilizar un diagrama de árbol, si se estableciera algunos pasos serían:
1) Selecciona las ramificaciones que ya sucedieron
2) De esas ramificaciones se selecciona las que son favorables
3) se hace favorables entre en lo que ya sucedió y calculamos la probabilidad

[EP_Enrique_A_IV_I_c]

Entrevistador: ¿Cuáles son algunas dificultades en el teorema de Bayes?
Enrique: Había leído una de los artículos de investigación, que la mayor dificultad es en la identificación del tipo de probabilidades que hay ahí. En el proceso de estar conceptualizando.
Si tú le preguntas a un estudiante que ha llevado el teorema de forma axiomática a uno que lo ha hecho con diagrama de árbol. El estudiante del diagrama de árbol te platica lo que hace, más no te dice estamos utilizando una probabilidad condicional y que estos son eventos dependientes; uno de forma axiomática tal vez no lo pueda decir así, pero vemos que está aplicando las fórmulas de probabilidad, es más formal en la aplicación de la fórmula de Bayes. En las dos, hay problemas, no se conceptualiza lo que en esencia es el teorema de Bayes.
Entonces, en la propuesta que vi había que primero tenemos que identificar las probabilidades a priori y las a posteriori. A priori las probabilidades de A y B, a posteriori, la probabilidad de B/A, de C/B, identificarlos de esa

manera y calcular la probabilidad condicional, vemos que lo calculan de la forma axiomática.

[EP_Enrique_A_IV_I_f]

Entrevistador: ¿Qué es lo esencial para entender el teorema de Bayes?
Enrique: Cómo estamos hablando de una probabilidad condicional del teorema de Bayes, entonces lo primero que debemos saber es como determinar la probabilidad condicional en espacios equiprobables. Tenemos la probabilidad de una intersección y la probabilidad de un evento e identificarlo en el problema. Y en la parte de la intersección como es un evento dependiente tenemos que saber cómo calcularla para eventos dependientes.
Para mí, la parte importante son la probabilidad condicional y la probabilidad de eventos dependientes.

[EP_Enrique_A_IV_I_g]

Entrevistador: Cuando preparas una clase del Teorema de Bayes, ¿qué esperas que el alumno aprenda?
Enrique: 1) Identificar las probabilidades.
2) Aplicar el teorema
3) Tomar decisiones utilizando el teorema de Bayes. De forma a priori no tenemos como que tanta certeza para tomar una decisión sobre qué es lo que debo de hacer y a partir de indagar en los estudios y aplicado al teorema de Bayes puedo tomar una mejor decisión. Puede ser que la probabilidad que tenia de forma inicial aumente con base a otros estudios o bien disminuya.

[EP_Enrique_A_IV_I_e]

Entrevistador: Has dicho que el teorema de Bayes es muy demandante
Enrique: Es demandante, Porque el estudiante debe comprender muy bien los temas anteriores para poder resolver el teorema de Bayes. Sí él no domina la parte de la condicional y de los eventos dependientes, no va a poder calcular o aplicar el teorema de Bayes.

[EP_Enrique_A_IV_I_g]

De dos fragmentos de entrevista se identifican las nociones presentes en los argumentos de Enrique, estas nociones justifican las razón por la que enrique considera que en el teorema de Bayes convergen diferentes tipos de probabilidad.

Tabla 12.
Nociones de Enrique sobre el teorema de Bayes

Nociones	Descripción
1) Una estructura secuencial	Enrique percibe como necesario que el Teorema de Bayes sea uno el últimos de los tipos de probabilidad abordados en el

	curso, antes de iniciar con las distribuciones de probabilidad, debido a que requiere que el estudiante haya aprendido los otros temas que se encuentran presentes en el teorema, cómo señala: La probabilidad clásica, condicionada, la conjunta en términos de independencia, particiones, etc. Sin embargo, señala que es posible abordarla solo con la probabilidad clásica, arriesgando la esencia de lo que es el teorema de Bayes
2) Reconoce que es una probabilidad inversa	Entre lo que se espera que el estudiante aprenda en una clase de probabilidad, se menciona el hecho de una toma de decisiones, en dicha descripción se menciona la comparación de un probabilidad *a priori* y la probabilidad *a posteriori*. Reconociendo la práctica que genera la necesidad de establecer el Teorema de Bayes u otro tipo de probabilidad.
3) Entendimiento sobre la matematización del teorema de Bayes	Para Enrique, es importante el desarrollo y entendimiento de la formula, no por la formula misma, sino porque lo que ella encierra sobre la construcción del teorema de Bayes. Sugiriendo que ha habido una reflexión sobre la fórmula
4) Necesidad de verla de forma axiomática	Existe una defensa respecto a la enseñanza del teorema de Bayes desde un enfoque axiomático. Esta postura surge de la reflexión sobre diferentes investigaciones que sugieren que este método permite la conceptualización del teorema de Bayes en contraste con otros métodos como es el diagrama de Árbol.

4.2.2.2 Los significados del Teorema de Bayes en la Resolución del Problema

Enrique decidió solucionar el problema en un pizarrón verde y utilizar gis, debido a esto se realizó una trascripción más visible de su solución (Figura 20)

Para esta solución se le pidió a Enrique que nos explicará porque decisión resolver el problema de esta forma. Durante la reflexión menciono algunos aspectos importantes que respaldan la información anterior:

> *Por esta razón te decía que el teorema de Bayes está bien ubicarlo después de ver la mayoría de la teoría de probabilidad, porque hay que definir los eventos, hablar de conocer los complemente, luego sacar las probabilidades iniciales y condicionales o a priori y a posteriori, luego la probabilidad conjunta de eventos dependientes*

[PT_Enrique_B_I_2]

Al resolver el problema con probabilidad axiomática, Enrique necesita el conjunto de conocimientos anteriores de la teoría de la probabilidad para la resolución, justificando así la denominada convergencia y la razón de su posicionamiento curricular. De manera similar, Para Enrique un tratamiento axiomático resalta la naturaleza del teorema de Bayes

> *… igual podría haber utilizado un diagrama, pero no sería fácil percibir elementos como la probabilidad conjunta de eventos dependientes, y no sería posible diferenciar la complejidad del inciso c), que es muy similar al inciso a).*
>
> [PT_Enrique_A_IV_g]

A: Tiene Cáncer

B: Resultados positivo de la mastografía

$P(A) = 0.008$ $\quad P(A|B) = .90$

$P(A|B^C) = .1$

$P(A^c) = 0.992$ $\quad P(A^c|B) = .07$

$P(A^c|B^c) = .93$

a) Sí una mujer adulta tiene cáncer ¿cuál es la probabilidad de que tenga una mastografía positiva?

$Sí\ A \rightarrow B \qquad \rightarrow P(A|B) = .90$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una mastografía positiva?

$Puede\ ser\ B\ y\ A \qquad \rightarrow P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(A)$

$P(B \cap A) = (.90) \cdot (.008) = 0.0072$

$O\ puede\ ser\ B\ y\ A^c \qquad \rightarrow P(B \cap A^c) = P(A^c|B) \cdot P(A^c)$

$P(B \cap A^c) = (.07) \cdot (.992) = 0.6944$

0.07644

c) Sí tiene una mastografía positiva ¿Cuál es la probabilidad de tener cáncer?

$$Sí\ B \rightarrow A, \qquad \rightarrow P(B|A) = \frac{P(A|B)P(A)}{P(A|B) \cdot P(A) + P(A^C|B) \cdot P(A^c)}$$

$$P(B|A) = \frac{0.0072}{0.07644} \approx 0.93$$

Figura 20. La solución de Enrique al problema

La resolución expuesta en la pizarra si expresa una diferencia entre el cálculo de las probabilidad del inciso a) y del inciso c), de hecho de una forma icónica evidencia la diferencia de cálculos, uno va de $sí\ A \rightarrow B$ y el otro $sí\ B \rightarrow A$, en uno tienes la causa y quieres saber la probabilidad de que suceda cierto evento, y en el otro tienes un evento determinado y deseas saber la probabilidad que sea originado por cierta causa. Así mismo se distingue que el cálculo de $P(A \cap B)$ es de una probabilidad conjunta por la fórmula.

Pese a que esta forma de resolver el Teorema de Bayes dota de mayor significado a la fórmula, requiere un trabajo previo del profesor para el dominio de los contenidos del estudiante. Es posible que a partir de esta resolución se logre la matematización del Teorema de Bayes, pero faltaría reconocer otros elementos importantes que generan en la práctica un pensamiento que involucre la probabilidad inversa. Esta última recomendación surge de algunas reflexiones propuestas por Enrique:

> *Entrevistador: ¿algo más que quieras agregar respecto al problema o tu solución?*
> *Enrique: Pues no había visto un ejemplo como este, que mezcle la condicional, la probabilidad total y el Teorema de Bayes, pero resulta interesante como para aplicar en el próximo curso… es que los incisos y visto desde lo axiomático, te ayuda a ver diferencias de algunas cosas. Pero sí le agregaría algo ¿cómo para que algo esos cálculos de probabilidades? Por ejemplo, en Bayes sería bueno preguntar antes sobre lo que los estudiantes piensan que debió causar una prueba positiva y ya con el análisis de Bayes tomamos una decisión, … sí como que eso le falta , cálculo las probabilidades, pero que hago con ella, no sé en mi propuesta si los llevo a tomar una decisión.*
>
> [PT_Enrique_B_IV_7_c]

4.2.2.3 Enrique: Conclusión de los significados asociados al Teorema de Bayes

En consecuencia, los significados asociados al teorema de Bayes es que Enrique lo mira como una probabilidad inversa, que por su complejidad requiere de un bagaje de conocimientos de la teoría de probabilidad, mismos que debieron ser conceptualizados para generar mejor entendimiento respecto al teorema. En términos de Enrique, la probabilidad axiomática permite percibir la naturaleza del teorema de Bayes, y conceptualizarlo. Asimismo, el proceso del cálculo de probabilidad no es suficiente si no se lleva a la toma de decisiones (Figura 21)

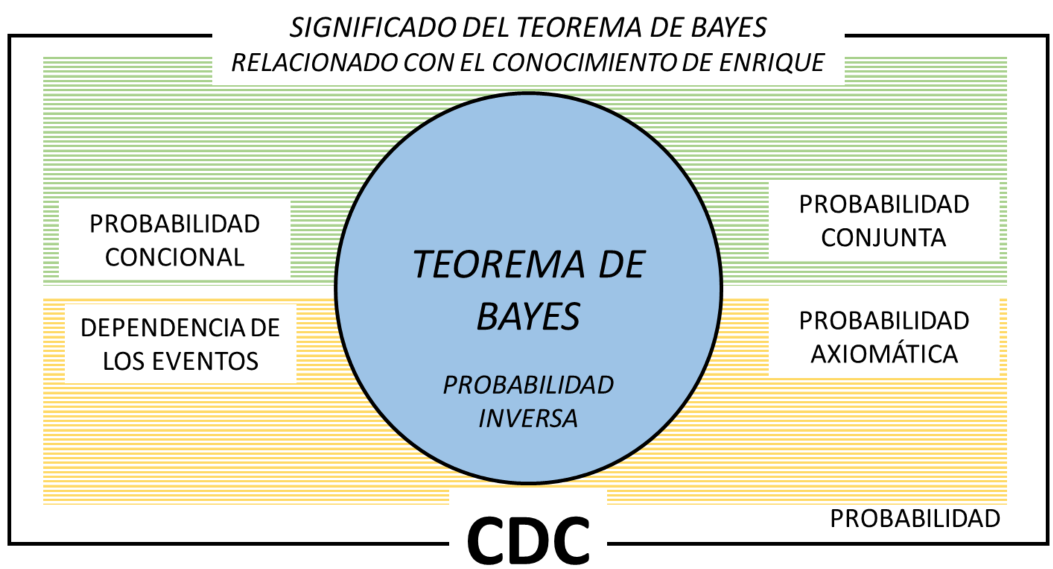

Figura 21. Significados del Teorema de Bayes relacionados con el conocimiento de Enrique

4.2.3. La propuesta de enseñanza del Teorema de Bayes

La propuesta de enseñanza tiene por objetivo hacer uso del teorema de Bayes para la toma de decisiones en un contexto y recursos determinados. Para ello, Enrique introduce un problema de toma de decisiones como la siguiente:

Problema

Diversos expertos señalan que no existe información científica aplicada a la exploración petrolera que permita conocer a detalle la localización de los sitios para perforar pozos petroleros en aguas profundas del Golfo de México:

No se justifica la perforación de pozos petroleros en aguas profundas del Golfo de México, cuando las propuestas para realizarlos son apoyadas por conceptos de paleosedimentología[1], disciplina que nada tiene que ver con la exploración petrolera (...) la exposición de proyectos de exploración petrolera para perforar pozos y la descripción de campos conocidos adolecen de la información rigurosa que requiere la actividad petrolera (Cantú, 2010).

Debido a esto, el comité de PEMEX decide comprar terrenos en los que podría haber petróleo.

Uno de estos terrenos cuesta **30 millones de dólares**. De acuerdo a estudios realizados por empresas locales se estima que hay un **65% de posibilidades** que en dicho terreno se encuentre algún yacimiento de petróleo.

Actividad parte 1

En equipos de 3 personas, contesta lo que se te pide:

1) ¿Consideran que el comité de PEMEX debe optar por comprar el terreno? ¿Por qué?

Figura 22. MD_1_Enrique_B_IV_4
Fuente. Hoja de trabajo para e Teorema de Bayes

Los alumnos dicen sí, porque 65% es mucho, pero hay 35% de probabilidad de que no haya. Entonces yo les digo, pónganse el papel del asesor, debe tomar una decisión importante de gastar o no 30 millones de pesos…Si tomáramos el papel del asesor en la vida real no tomaríamos una decisión tan a la ligera.

[MD_Enrique_B_IV_4]

El propósito de la actividad es que lo estudiantes a partir de las probabilidades dadas, toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre. Esta condición es la que determina la probabilidad subjetiva, pues aquellos alumnos que contesten que sí en sus creencias consideran que 65% es suficiente, mientras que aquellos que se fijan en el 35% señalarán su preocupación basado en la experiencia, en términos de Shaughnessy (1992) son parte de los juicios heurísticos a los que nos enfrentamos a este tipo de probabilidades. Por otra parte, para desarrollar un pensamiento estocástico la incertidumbre es necesaria, es donde la estadística y probabilidad toma sentido, en medio de esas condiciones uno debe tomar una decisión a un grado de probabilidad que comunica la confiabilidad que tenemos sobre algo.

Actividad parte 2

2) Existe la posibilidad de realizar una exploración geológica indirecta. Esta consiste en realizar un sondeo sísmico, la cual es un estudio que se realiza en terrenos en los que se cree que hay petróleo sin necesidad de realizar una perforación; si el estudio indica un resultado positivo, quiere decir que hay petróleo en el terreno, sino lo contrario. El valor de este estudio está alrededor de los 2 millones de pesos. Aquí hay una muestra de su efectividad:

	Sondeo con resultado positivo	**Sondeo con resultado negativo**
Terrenos en los que se encontraron yacimientos de Petróleo.	55	7
Terrenos en los que no se encontraron yacimientos de petróleo.	5	53

De acuerdo al estudio presentado, responde:

a) ¿Cuáles son las posibilidades de que el sondeo sísmico indique un resultado positivo en terrenos que no tienen petróleo?

b) ¿Cuáles son las posibilidades de que el sondeo sísmico indique un resultado positivo en terrenos que NO tienen petróleo?

c) ¿De qué manera puede ayudar este estudio geológico indirecto al comité de PEMEX en la decisión sobre la compra del terreno?

Figura 23. MD_1_Enrique_B_IV_4
Fuente. Hoja de trabajo para e Teorema de Bayes

La segunda parte del problema (Figura 23) plantea la idea de incluir información nueva información que nos permita tomar una mejor decisión, esta inclusión de probabilidades *a priori*, es lo que diferencia a este tipo de problemas de otros que requieren mecanismos probabilísticos. La tabla presentada, es una tabla de contingencia y las preguntas sugieren el cálculo de probabilidades condicionales, cuya finalidad es la siguiente:

> *… lo que busco que hagan los estudiantes es que utilicen la probabilidad para aumentar las posibilidades o ver que se reduzcan las posibilidades para tomar una decisión.*
>
> [MD_Enrique_B_IV_4]

Posterior a ese cálculo se plantea las preguntas que conllevan al cálculo de una probabilidad haciendo uso del teorema de Bayes (figura 24), lo interesante sería saber cuáles son las estrategias que los estudiantes utilizan para enfrentarse a este tipo de probabilidad, pues la pregunta en estructura tiene un símil con la pregunta 2 de la actividad 2 (Figura 23).

Actividad parte 3

3) Determina la probabilidad de que haya petróleo en el terreno si el sondeo sísmico indica un resultado positivo.

4) De acuerdo al resultado anterior, ¿Consideran que el comité de PEMEX debe optar por comprar el terreno si el resultado del sondeo resulta positivo?

5) ¿De qué manera la probabilidad nos ayuda a tomar decisiones?

Figura 24. MD_1_Enrique_B_IV_4
Fuente. Hoja de trabajo para e Teorema de Bayes

La actividad que planteada por Enrique para abordar el teorema de Bayes, resalta la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre. El cambio en las creencias, cómo establece el teorema de Bayes, es notable en la Actividad 1 pregunta 1 (Figura 22) y la actividad 3 pregunta 5 (Figura 24), este cambio ocurre cuando se incorporan las probabilidades *a priori*, y modifican nuestro cambio en la forma que pensamos respecto de una situación.

Esta propuesta parece indicar que Enrique tiende a desarrollar un pensamiento estocástico, bajo la estrategia de la conceptualización de los saberes, premiando la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre y la funcionalidad de los saberes tanto Estadísticos como Probabilísticos.

Capítulo 5.

Discusión de los resultados y conclusiones

En cuanto al capítulo anterior se analizaron los significados de Ana y Enrique de forma independiente, en este último capítulo se pretende concluir con la comparación de los significados de Ana y Enrique y su interacción con el saber estocástico.

5.1 Los significados y su relación con el saber estocástico Saber estocástico

A manera de recordar, cuando se refiere a los *estocástico* se hace referencia al uso del conocimiento estocástico bajo condiciones de incertidumbre, es decir, no solo que el estudiante conozca las herramientas necesarias sino que sea capaz de discernir sobre su uso en un contexto determinado esto debido a que identifica elementos que determinan la naturaleza del saber. De forma particular, cuando se habla del *saber estocástico,* se tiene especial interés en desarrollar el pensamiento estocástico (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasparini, 2015; Elizarrás, 2014, Espasandin, 2006; Salcedo 2006). Con esto en mente se sintetiza la información obtenida en el Capítulo IV en la Tabla 13

Tabla 13.
Comparación de los significados asociados a los saberes estocásticos

	Ana	**Enrique**
Estadística	• El carácter del saber es *funcional*, proponiendo diferentes contextos de aplicación • El enfoque de enseñanza es para la *toma de decisiones*, pero no se percibe lo aleatorio • Tendencia desarrollar un *Razonamiento Estocástico*	• El saber es de carácter *funcional*, por tanto se requiere de contextos que permítala conceptualizar del saber. • El enfoque de enseñanza es la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre, lo que brinda significado a los saberes

Probabilidad	El carácter del saber es *Escolar*, limitada a un currículo y un tiempo determinado en la escuela El enfoque de enseñanza es *Determinístico,* se limita al cálculo de probabilidades y el establecimiento de formulas Tendencia de desarrollar una *Cultura Estadística.*	• Tendencia a desarrollar un *pensamiento estocástico*

La Tabla 13 demuestra un que Ana y Enrique asocian significados diferentes a los saberes estocásticos. Por un lado, Ana hace una distinción entre la entre los contenidos de Estadística y los contenidos de Probabilidad, habla, describe propuestas y brinda tratamientos diferentes, de hecho los alcances del dominio estocástico son diferentes. Por su parte, Enrique desarrollo un discurso unificado, sin diferenciar a la estadística de la probabilidad, dando la apariencia de que lo percibe como un todo, con diferentes herramientas matemáticas, pero con un mismo propósito, de una misma naturaleza y bajo un mismo alcance en los dominios estocásticos.

Es notable distinción entre los significados de ambos profesores, debido a que los dos trabajan bajo un modelo por competencias, donde Enrique pareciera ser que tiene una visión más amplia respecto a desarrollar una competencia. La cuestión sería ¿a qué se debe esto? No es a la falta de conocimientos, puesto que ambos tienen la misma formación inicial; No es la experiencia profesional pues Ana tiene más experiencia en el ámbito docente, entonces, ¿qué hace esta distinción de los significados de uno y otro profesor? Cabrera-Chim y Cantoral (2012), señalan que es mediante la interacción continua con el saber matemático que los profesores construyen su conocimiento alrededor de un saber específico, esto dependerá de aquellos significados que construyan y reconstruyan en cada momento que ellos se acerquen y conozcan esos saberes, no solo en el ámbito escolar, sino en diversos ámbitos donde es funcional, como señala Cantoral y Reyes-Gasparini (2012) mirar los saberes solo en el contexto escolar, es solo mirar un objeto matemático producto de una trasposición didáctica que ha perdido mucho de aquello que le brinda significado.

Esta reflexión es pertinente por el comentario que realiza Enrique respecto a cómo prepara sus clases:

> *En sí, concretamente, con lo que estuve viendo en la facultad… con la parte epistemológica de la probabilidad, cómo se va construyendo los conceptos, cuál fue su origen, me ha dado una pauta para buscar de qué manera voy a enseñar probabilidad en mi clase; además de leer algunos artículos de investigación sobre los problemas de enseñanza y aplicaciones de la probabilidad. De hecho en que estaba viendo probabilidad en ingeniería, no había visto la probabilidad y lo seguro, pero por ejemplo en química el modelo de Bohr es un modelo probabilístico, porque como hay mayor probabilidad de que sea así, se toma ese como modelo*
>
> [EP_Enrique_B_III_3]

Por tanto, los significados que enrique le asocia al saber estocástico tienen a tener esa naturaleza debido a su continua interacción con él en otros escenarios diferentes a los escolares, lo que lo ha llevado a cambiar de un paradigma clásico de enseñanza a uno centrado en la construcción del conocimiento, como se menciona en el Capítulo IV. De forma particular, se observa este patrón con un saber específico, cuando se considera el teorema de Bayes

Tabla 14.

Comparación de los significados asociados al Teorema de Bayes

	Ana	**Enrique**
Teorema de Bayes	Es una *probabilidad clásica*. En cuya construcción se aprecian diferentes grupos y en cada grupo se realiza un cálculo de probabilidad condicionada	Es una *probabilidad inversa*. Se requiere de la teoría de la probabilidad para su resolución
	El tratamiento determinístico	Tratamiento no determinístico

En la Tabla 14, se aprecia los significados que cada profesor le asocia al Teorema de Bayes, estás tienen una correlación directa con los significados que se dan en la Tabla 13, permanece lo determinístico en los significados de Ana, y Enrique se preocupa porque el escenario donde se construya el Teorema de Bayes sea presente la incertidumbre. Estos significados entran en juego al momento de proporcionar una propuesta de enseñanza, como se nota en la Tabla 15

Tabla 15.
Comparación de la propuesta de enseñanza

	Ana	Enrique
Propuesta de enseñanza	La propuesta es conocida como *renormalización* (Gómez, 2000) en ella se suprime la formula y se establece al teorema de Bayes como una probabilidad simple.	Se propone un problema de toma de decisión, sobre sale una epistemología similar a la del teorema de Bayes, y la incertidumbre es un factor en la toma de decisiones.

La propuesta de Ana es acorde al enfoque que le da la probabilidad, pues permite establecer procedimientos y algoritmos que tiende a enfocarse en el cálculo de probabilidades, y nuevamente cumple con el requerimiento escolar. La propuesta de Gómez (2000), qué es la propuesta de Ana, señala que en el diagrama se haga mención de elementos como eventos dependientes, excluyentes, cálculo de probabilidad conjunta, etc., como parte comprender porque la asignación de probabilidades en cada una de las ramificaciones y el cálculo de los casos favorables entre los casos posibles.

En contraste, la propuesta de Enrique tiende a resaltar la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre, resalta el carácter subjetivo de la probabilidad, la integración de las probabilidades *a priori*, y la obtención de una probabilidad *a posteriori*, que tiene como finalidad un cambio de creencias expresadas en la decisión primaria y la decisión final.

Con lo anterior, sobre sale la afirmación de Llinares (1989), quien señala la importancia de los significados que los profesores le otorgar a los saberes, ya que estos determinan el modo el que una persona ve a los saberes, los usos que les da, los contextos en que decide utilizarlo y también la forma en que los trasmite o habla sobre ellos.

Remitiéndonos a la pregunta inicial que motivo la investigación *¿Cuál es la propuesta didáctica del Teorema de Bayes que el profesor de matemáticas diseña para su implementación en el aula de clases?*, podemos decir:

- Puede ser meramente determinista, si los significados del profesor tienen a considerar a lo estocástico de la misma manera. Es decir, el profesor no logra apreciar a la incertidumbre como parte de la naturaleza que compone al mundo y que en medio de ella se puede tomar decisiones.

- Puede ser no determinista, si los significados del profesor tienen a reconocer la naturaleza epistemológica del saber y reconoce prácticas de referencia que permitan la construcción del conocimiento.

De forma general, estas propuestas didácticas deben en gran manera de los significados que se asocien al saber estocásticos, estos significados deben de la profundidad de lo que se conoce del saber, de interactuar con él en diferentes escenarios, de profundizar en la epistemología del saber, lo que en cierta forma podría decirse de una *resignificación* continua y permanente de los saberes estocásticos.

Dicha condición, permite al profesor diseñar propuestas, rediseñar el discurso matemático escolar y cambiar el paradigma de enseñanza de los estocásticos, pasando de la centración del objeto a la centración del saber, de la trasmisión de conocimiento a la contrición colectiva de los saberes.

Cabe señalar que en ambos casos se notan deficiencias en las propuestas, sin embargo, se diferencia de un saber más especializado a uno escolar. El saber especializado, no es que se aplique en un aula sino que brinda diversos marcos de referencia o bien pretende resaltar aquellos elementos conceptuales y operacionales del saber que se presenta, haciendo mayor énfasis en lo conceptual y que permita distinguir al saber en los escenarios que se propongan más que la mera resolución de problemas típicos.

Por otro lado, los significados son valiosos en el dME, pues norman desde la práctica del profesor hasta los objetivos y alcances de los saberes. Estos permean la construcción y delimitan la participación de los individuos.

5.2 Puntos a discutir sobre los resultados

Es posible que la apreciación hasta este momento sea de que se privilegiado la propuesta de Enrique sobre la de Ana, condición que discrepa en la investigación por lo siguiente:

- La propuesta de Ana da evidencia de que la distribución y posicionamiento de los “tópicos de estadística y probabilidad” dentro de un currículo, llamémoslos así porque no son saberes, responden a un tipo de pensamiento lineal-progresivo, donde se apuesta a que para aprender el teorema de Bayes es necesario tener una bagaje de conocimientos sobre la teoría de probabilidad, cosa que pareciese falsa con la propuesta de Ana.

Como bien menciona, su desarrollo es meramente empírico y tiende a ser lógico, común a la toma de decisiones que se hace en el cotidiano, y donde solo es necesario saber que la probabilidad puede resumirse a casos favorables entre posibles.

De ello podemos concluir, que el teorema de Bayes puede verse en cualquier momento, solo basta con evocar a nuestro cotidiano, a los razonamientos que hacemos para estructurar una lógica en las probabilidades.

- La propuesta de Enrique, es de reconocer que está estructurada, pero apuesta a la probabilidad axiomática como su fuerte; de entrada esta propuesta excluye a todos aquellos que no tienen dominio de la probabilidad axiomática. Sin embargo, esta propuesta resalta la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre, esencial para generar el pensamiento estocástico.

La recomendación sería ¿cómo conjugar estas dos propuestas? La primera que parece responder a un orden lógico de pensamiento, y la segunda que responde a la matematización del teorema de Bayes. Una propuesta que unifique ambos podría resultar provechosa para la enseñanza del teorema de Bayes

También se reconoce que todo lo reflexión hasta ahora se ha realizado con los profesores es más de carácter ideológico, aceptando como supuesto que esto se lleva a la práctica de la forma en que ellos dicen, en que ellos comprenden y lo que el papel señala. Por tanto, es necesario contrastar estos resultados con lo que suceden en la práctica, y también cuales son los alcances de cada una de las propuestas, sus dificultades y las deficiencias que posiblemente no sean percibidas este momento de a investigación.

5.3 Reflexiones que surgen en base a los resultados

En el momento de replantear los resultados, la experiencia en la entrevista con los profesores, y el escuchar las reflexiones de los mismos, dieron pie a las siguientes recomendaciones:

- La búsqueda de la profesionalización docente debe atender más a reconstruir y construir los significados que los profesores tienen sobre aquello que enseñan y la forma en que ellos enseñan. Por mencionar algunos ejemplo, Ana identifico que aquello que llamaba subtotal en realidad tiene un nombre que es la probabilidad Total.
- El profesor es abierto a aprender cuando se reflexiona a la par con él, cuando siente que están en igualdad de condiciones y ambos salimos beneficiados.
- El conocimiento del profesor debe ser fortalecido por otras fuentes de información como son los resultados de investigación sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, propuestas didácticas para abordar un saber específico, investigación aplicada y la reflexión entre grupos académicos que imparten la misma asignatura.
- Su práctica docente es producto de una construcción de identidad profesional que depende de su experiencia docente, de su visión de la educación, de su visión de la matemática y del papel que determina la institución donde labora.

5.4 Una discusión abierta

Durante la entrevista, cuando se les pidió a Ana y a Enrique que describieran un poco el contexto donde laboran, llamo la atención la respuesta de cada uno de ellos:

Ana: Te digo la prioridad es otra, no te negare que hay chicos muy buenos… pero que te diga vamos hacer actividades que introduzcan en conocimiento o llámalo como tu quieres, no. Porque la prioridad de la institución es otra

Enrique: El objetivo que nos impone la dirección es sacara los muchachos adelante. Ahora estamos tratando de reducir el número reprobados que hay, pero

> *no podemos pasarlo en los extraordinarios o hacer más fácil los temas que se va, sino de buscar estrategias para cambiar la problemática que tenemos.*

En ambos comentarios, se atiende a que los profesores conocen la realidad y la visión que la instrucción tiene sobre la educación. En la reflexión obtenida en la entrevista se concluye que la propuesta de Ana como la de Enrique responde a la visión de la educación que proclama la escuela de forma práctica. Por tanto, la pregunta que se plantean son ¿cuál es el papel que tiene la intuición dentro de la construcción de los significados de los profesores con respecto a un saber específico? ¿Es las propuestas de enseñanza producto de la ideología institucional? ¿En medio de la búsqueda de la profesionalización docente, dónde queda la institución educativa? ¿Son los profesores los únicos actores principales? ¿Son los profesores el verdadero agente de llevar a cabo las reformas educativas?

La reflexión a estas últimas cuestiones se dejan al lector y a posibles investigaciones futuras.

Referencias

Alonso, D., y Tubau, E. (2002). Inferencia bayesianas: Una revisión teoría. *Anuario de Psicología, 33(1)*, 25-47

Alonso Rodríguez, A. (2008). El resurgir de Thomas Bayes. *Anuario Jurídico y Económico Escurialense, 41*,327-360

Azcárate, P. (1998). Sobre el conocimiento didáctico del contenido: Dilemas y alternativas. In L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.27-36). Granada: SEIEM

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. (2003) Conocimiento Profesional de referencia con relación al conocimiento probabilístico. Una aproximación a las ideas de los futuros profesores de primaria sobre el mismo. *Acta del Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. 27*, 941-984

Azcárate, P. (2006). ¿Por qué no nos gusta enseñar estadística y probabilidad?. Universidad de Cádiz. Recuperado de: http://www.earlystatistics.net/.../files/Azcarate_thales2006_Conferencia.doc

Batanero, C., Ortíz, J. J., y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 13(44),* 7-16.

Bardín, L. (1986). El análisis de contenido. Madrid: Akal

Batthyány, K. y Cabrera, M. (2011). Metodología de la investigación en Ciencias Sociales. *Apuntes para un curso inicial.* Universidad de la República. Montevideo.

Bayes, T. y Price, M. (1763). An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, FRS communicated by Mr. Price. In a letter to John Canton, AMFRS. *Philosophical Transactions* (1683-1775), 370-418.

Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes. Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis. *Research papers from ICOTS, 4*, 20-37.

Borovcnik, M. (2005). Probabilistic and statistical thinking. *Proceedings of the fourth congress of the European society for research in mathematics education*. 485-506

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Reserches en didactique de Matemátiques, 7(2),* 33-115

Brousseau, G. (1989). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (1ª parte). Petit. 10(21), 21-68

Callaert, H. (2004). In search of the specificity and the identifiability of stochastic thinking and reasoning. In Mariotti M.A. (ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Pisa. 1-7

Cabrera-Chim, L., y Cantoral, R. (2012) La deconstrucción de los conocimientos matemáticos. Elementos del desarrollo profesional del profesor. Ponencia presentada como avance de investigación en el Cinvestav.

Cabrera, L. (2014). El estudio de la variación en la p´ractica del profesor de Cálculo. Un estudio de caso. *Tesis de Doctorado no publicado*. Cinvestav, México, D.F.

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la matemática en la educación superior. Revista *Electrónica Sinéctica*, (19), 3-27.

Cantoral, R. (2013). Tendencias: los métodos de investigación para profesionalización docente en matemáticas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(1)*, 5-12. Recuperado de

Cantoral, R., Montiel, G., Reyes Gasparini, D. (2015). El programa Socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: El caso de

Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18 (1),* 5-17

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1(8)*, 9-28

Carballo, T., y Ojeda, A. (2010).La enseñanza de la probabilidad en el aula: ideas fundamentales como base de un pensamiento probabilístico en docentes de educación primaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1107-1116.

Cardeñoso, M., y Serradó, A. (2006). ¿Puedo adivinar qué idioma está hablando mi amigo con sólo contar las vocales? Escenarios para el aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad. *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar. Granada: Sociedad SAEM Thales y Universidad de Granada*, 279-301.

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. 3ª. Edición. Edit. Aique, Buenos Aires.

Contreras, J., Batanero, C., Díaz, C., y Arteaga, P. (2013). Evaluación de la falacia del eje emporal en futuros profesores de educación secundaria. *Acta Scientiae, 14(3*), 346-362.

Conzuelo, S., y Rueda, M. (2010). La Evaluación de la Docencia en México: Experiencias en Educación Media Superior. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 3(1),* 105-119.

Cordero, F., Cen Che, C., y Suárez Téllez, L. (2010). Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13 (2),* 187-214

Cuevas, H. (2011). Enseñanza de la estocástica: sugerencias para su implementación a edades tempranas. *Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática* Educativa. México.

D'Amore, B (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. *Número especial*, 177-195

Da Ponte, P., y Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da estatística: Análise comparativa de três países. *Quadrante, 10(1),* 93-115.

Da Ponte, J. P. (2011). Preparing teachers to meet the challenges of statistics education. *In Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 299-309). Springer Netherlands.

Del Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49(1)*, 53-64.

Díaz, C., Contreras, J., Batanero, C., y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Boletim de Educação Matemática, 26(44),* 1207-1225.

Díaz, C., y de la Fuente, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática, 18(2)*, 75-94.

Díaz, C. (2007). Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en Psicología. *Tesis Doctoral no publicada*. Universidad de Granada. España.

Díaz, C., Ortiz, J., y Serrano, L. (2007). Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes en la aplicación del Teorema de Bayes. *Investigación en Educación Matemática XI*. 199-208

DGB (2013). Probabilidad y Estadística. Programas de estudio. México. Recuperado de: http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_5sem/probabilidad-estadisticas-i.pdf

Dolores, C. (2013). Matemática Educativa: La formación de profesores. In C. Dolores, M. Gónzales, J. Hernández y L. Sosa (Ed). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 13-23). Díaz de Santos. México

Dolores, C. y Hernández, J. (2013). La formación de profesores de matemáticas desde el curriculo oficial. In C. Dolores, M. Gónzales, J. Hernández y L. Sosa (Ed). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 49-76). Díaz de Santos. México

Elizarrarás, S. (2014). El pensamiento estocástico y el pensamiento pedagógico en la formación de docente para la educación básica: Viabilidad, Trascendencia y Pertinencia. *Libro de avances de investigación en la mejora de la educación en la formación de docentes, 2*, 15-27.

Espasandin, C. (2004). El conocimiento profesional de los profesores y sus relaciones con la estadística y la probabilidad. Investigación en educación matemática: *Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM): A Coruña*, (pp. 239-248). Servicio de Publicaciones.

Espasandin, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. *In Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.*

Espíndola, J. (2014). Conocimiento de las representaciones instrucciones de un profesor de Estadística en la carrera de Educación. *Tesis de maestría no publicada*. Universidad Autónoma de Yucatán.

Figueroa, S., Baccelli, S., Prieto, G., y Moler, E. (2013). Funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas Bayesianos. *Revista de Educación Matemática*.

Freire, P. (1997). Pedagogía de la autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa. Siglo XXI.

Galicia Reyes, J. (2006). Estrategias para impulsar la profesionalización del trabajo académico en México. *Andamios, 3(5*), 91-112.

García, S. y Vanella, L. (1998). Del dato a la teoría, por los estudios de caso. *Normas y valores en el salón de clases*. Siglo XXI

García, J., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6,* 5-23.

Gibbs, G. (2012). El análisis de datos en investigación cualitativa. Ediciones Morata.

Girón, F. (1994). Historia del cálculo de probabilidades: de Pascal a Laplace. *Curso de Conferencias sobre Historia de la Matemática en el Siglo XIX.*

Girón, F. (2001). Tricentenario de Thomas Bayes. Presentación. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *95*(1), 7-8.

Grossman, P. L., Wilson, S. M., y Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. C. Reynolds (Ed.*). Knowledge base for the beginning teacher* (pp.23-36). Oxford: Pergamon Press

Godino, J., y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática, 12(1)*, 70-92.

Gómez, M. (1999) Origen de la Teoría de la Probabilidad. Teorema de Bayes. Ciencia en el siglo XX. *Actas del seminario <<Orotova>> de Historia de la ciencia, 4,* 13-29

Gómez, M. (2001).EL «Ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar». *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales Serie A: Matemáticas, 95(1-2),* 63-80.

Gómez, S. (2000). ¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos? Una propuesta didáctica para el tratamiento de la Probabilidad en bachillerato. Suma: *Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (35)*, 55-62.

González, J. (1992). El razonamiento científico desde una perspectiva bayesiana. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las técnicas, 15(28)*, 209-218.

González, M., y Pinto, J. (2006). La formación de profesores de enseñanza secundaria en España y Méjico. *Matemáticas para el siglo XXI*, 22.

Hernández, J. (2013).Elementos teóricos metodológicos a considerar en la formación de profesores de matemáticas. Propuestas específicas. In C. Dolores, M. Gónzales, J. Hernández y L. Sosa (Ed). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (195-199). Díaz Santos, México

Huerta, M. P. y Arnau, J. (2014). Percepción de los futuros maestros y profesores sobre usos y enseñanza de recursos en la resolución de problemas verbales de probabilidad condicional. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 415-424). Salamanca: SEIEM.

Inzunsa, S., y Guzmán, M. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación matemática, 23(1)*, 63-95.

Juárez, J. e Inzunsa, S. (2014). Comprensión y razonamiento de profesores de Matemáticas de bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. *Perfiles educativos, 36(146)*, 14-29.

Landro, A., y Gonzàlez, M. (2013). Bernoulli, De Moivre, Bayes, Price y los fundamentos de la inferencia inductiva. *Cuadernos del CIMBAGE*, (15).

Lavalle, A., Micheli, E., Boché, S., y Argentina, N. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. *Boletin de la SOAREM (Sociedad Argentina de Educación Matemática), 5(17),* 23-32.

Levin, R., y Rubin, D. (2004). Capítulo 4. Probabilidad I: Ideas introductorias. In G. Trujano (Ed.). *Estadística para Administración y Economía.* (pp.127-176). Pearson Educación

Lezama, J. y Mariscal, E. (2008). Docencia en Matemáticas: Hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, 21,888-900. Recuperado de: http://www.clame.org.mx/documentos/alme21.pdf

Lezama, J. (2009). Relevancia de los estudios sobre el campo del profesor de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, 22, 1391-1993. Recuperado de http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf

Lezama, J. (2010). Un estudio sobre el docente de matemáticas: enfoque socioepistemológico. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/~seminarioaes/resumen/Francisco%20Javier%20Lezama%20Semblanza%20y%20Resumen.pdf

Llinares, S. (1989). Las creencias sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza en estudiantes para profesores de primaria: Dos estudios de casos. *Tesis doctoral no publicada*. Universidad de Sevilla.

Llinares, S (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contextos en relación con la noción de función. In J. P. da Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.) Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formação? (pp. 47-82*). Secção de Educação Matemática. SPCE*: Lisboa, Portugal.

Llinares, S., Valls, J., & Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación matemática, 20(3),* 59-82.

Linares, S. (2009). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. *Colección Digital Eudoxus*, (15).

Llinares, S. (2011). Pautas para la formación de profesores de matemáticas. In G. Galicia (Eds). *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares: Casos y perspectivas* (pp. 125-144). Secretaria de Educación Pública (SEP). México

Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Education, 1(3),* 76-93.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, nº extraordinario XXV-aniversario*, 13-34.

Marchesi, A. (2009). Preambulo.In Medrano, C. y Vaillant, D. (Ed.). *Aprendizaje y Desarrollo profesional docente* .Organización de los Estados Iberoamericados para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Madrid. España. 7-9

Martínez, S. (1993). La probabilidad y la causalidad. *La ciencia: estructura y desarrollo* (pp. 111-126). Trotta.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión*, (20).

Medrano, E. y Bermúdez, J. (2012). Características del proceso de solución de problemas en estudiantes de la licenciatura de pedagogía infantil de la Universidad de la Sabana, a través del estudio del caso. *Tesis doctoral no publicada*. Universidad de la Sabana. Bogotá, Colombia.

Montiel, G. (2009). Formación docente a distancia en línea. Un modelo desde la matemática educativa. *Innovación Educativa, 9(46)*, 89-95. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/GMontiel-2009-InnovacionEd.pdf

Ortega, K. (2009). Características de la reflexión sobre la práctica de profesores de estadística en bachillerato. *Tesis de maestría no publicada*. Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM

Orton, A. (1996). Didáctica de las Matemáticas (2ª ed). Madrid. Morata

Parada, S (2011). Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional. *Tesis doctoral inédita*. Cinvestav. México. D.F.

Patton, M. (1990) Qualitatuve evaluation and Research Methods, Newbury Park, CA, Sage.

Penealva, M., y Posadas, J. (2009). El planteamiento de problemas y la construcción del teorema de Bayes. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 27(3)*, 331-342.

Perrenoud, P. (2001). La formación de los docentes en el siglo XXI. *Revista de Tecnología Educativa, 14(3),* 503-523. Recuperado de http://academicos.iems.edu.mx/cired/docs/tg/macroacademiaquimica/La%20formacion%20de%20los%20docentes%20en%20el%20siglo%20XXI_Perrenoud.pdf

Pinto, E., y González, T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas:¿ una cuestión ignorada?. *Educación matemática*, *20(3*), 83-100.

Pinto, J. (2010). Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudio de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación. *Tesis doctoral no publicada*. Universidad de Salamanca

Piñuel, J. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Sociolinguistic Studies*, *3(1)*, 1-42.

Reyes-Gasperini, D., y Cantoral, R. (2012). El empoderamiento. El empoderamiento docente desde la teoría socioepistemológica: caminos alternativos para un cambio educativo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1783-1792México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Reyes-Gasperini, D. (2011). Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas. *Tesis de Maestría no publicada*. Cinvestav. México, D.F.

Ribeiro, C. M., Monteiro, R., y Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación matemática*, *22(2),* 123-138

Rocha, P. (2007). Epistemología del razonamiento estadístico y aleatorio y su desarrollo a partir de proyectos de trabajo estadístico como innovación en la enseñanza de los objetos de estudio estocásticos. *Memorias del ENAES*. Bogotá.

Rodón, H., Ladino, L., y Orduz, P. (2014). Acerca de la enseñanza del teorema de Bayes. *Revista Educación y Desarrollo Social*, *9(1*), 144-159.

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). Metodología de investigación Cualitativa. *Colección Biblioteca de Educación*. Málaga: Aljibe.

Rodríguez, J. (2014).¿Qué diferencia hay entre la probabilidad y la estadística?. *Revista Digital Universitaria [en línea]*. *15* (9).

Salcedo, A. (2006). Didáctica de la Estocástica. Universidad Nacional Abierta. Caracas.

Salgado, C. (2007). Investigación cualitativa: diseños, evaluación del rigor metodológico y retos. *Liberabit, 13(13*), 71-78.

SEP (2013). Programa de Matemáticas V. México, SEP

Serbia, J. (2007). Diseño, muestreo y análisis en la investigación cualitativa. *Hologramática, 4(7)*

Serrano, W. (2005). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía, 27(75),* 131-164

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). Reston, Va., USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shulman, L. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Review, 57 (1), 4-14

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform.Harvard. E*ducational review, 57(1),* 1-23.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado: *Revista de curriculum y formación del profesorado, 9(2*)

Silva, L., y Muñoz, A. (2000). Debate sobre métodos frecuentistas vs bayesianos. *Gaceta Sanitaria, 14(6),* 482-494.

Silva, L., Benavides A., y Almera, J. (2002). El péndulo bayesiano: Crónica de una polémica estadística. *Llull, 25(52*), 109-128.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M. y Tuyub, I (2013). Matemática Educativa: La formación de profesores. In C. Dolores, M. Gónzales, J. Hernández y L. Sosa (Ed). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31-45). Díaz de Santos, México.

Soto, D. (2013). El campo de la formación del profesor de matemáticas y la exclusión de la construcción social del Conocimiento Matemático. El caso de un programa específico. In C. Dolores, M. Gónzales, J. Hernández y L. Sosa (Ed). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 121-140). Díaz de Santos. México.

Stake, R. (1998). Investigación con Estudio de Caso. España. Ediciones Morata, S.L.

Stark, S., y Torrance, H. (2005). Case Study. In B. Somekh y C. Lewin (Ed.). *Research Methods in the Social Sciences*, (pp.33-40). SAGE

Strogatz, S. (2010). Chances are. Recuperado de http://opinionator. blogs. nytimes. com//2010/04/25/chances-are.

Taronzos, L. (1996). Evaluación y Calidad. *Revista Iberoamericana de Educación, 10*, 63-78. Recuperado de http://www.rieoei.org/oeivirt/rie10a03.pdf

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). La Entrevista en profundidad. Introducción a los métodos cualitativos de investigación. *La búsqueda de significados*, (pp. 100-103). Barcelona: Paidós.

Uc, N. (2014). Comprensión e interpretación de la variabilidad estadística por parte de estudiantes para profesor de matemáticas. *Tesis de maestría no publicada*. Universidad Autónoma de Yucatán.

UADY (2013). Programa de Probabilidad y Estadística. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

UNAM (2013). Programa de Estudios de Estadística y Probabilidad I y II. México. Recuperado de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_estadistica.pdf

Vásquez, C., y Alsina A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números, (85),* 5-23.

Zaldivar, J. (2014). Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar. *Tesis doctoral no publicada*. Cinvestav, México, D.F.

Zapata, L., y Quintero, S. (2009). Una experiencia didáctica en la enseñanza del teorema de Bayes. *Comunicaciones presentadas en 10 ° Encuentro colombiano de Matemáticas*. Pasto, Colombia.

Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de pedagogía, 220*,44-49

ANEXO

La entrevista semiestructurada.

PRIMERA PARTE DE LA ENTREVISTA

Preguntas	***Objetivo y propósito***	***Tomado de***
Preguntas de identificación general como profesor		
1. ¿Qué formación tiene como profesor de matemáticas?	Conocer la formación inicial con la que el profesor cuenta, así como algunas otras	Tomado de Pinto (2010)
2. ¿Cuántos años llevas como profesor de matemáticas?	Conocer parte de su experiencia profesional	
3. Háblame acerca de la institución donde laboras, sus normas, sus objetivos, lo que requiere de ti como profesor de matemáticas	Conocer el contexto en el cuál labora, y posicionarlo a él dentro de la institución	
4. ¿Cuentas con alguna formación adicional sobre PyE?	Identificar el tipo de desarrollo profesional del profesor.	

SEGUNDA PARTE DE LA ENTREVISTA

Los significados asociados a la probabilidad y la estadística			
Pregunta	***Según las respuestas esperadas por los profesores considerando la propuesta de Pinto (2010), Espíndola (2015) y Uc (2014).***		
	Dimensiones del CDC	***Indicadores de los componentes analizados***	***Subindicadores***
5. ¿Cuántos cursos de probabilidad y estadística has impartido? ¿Ha cambiado tu	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	I Concepciones	2. Sobre los contenidos de probabilidad y estadística

concepción de la forma en que se enseña?		IV Conocimientos esenciales	1 Conceptos
6. ¿Qué deseas que los alumnos aprendan en un curso de PyE?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	IV Conocimientos esenciales	1 Conceptos 4 Principios 5 Vinculación con otros conceptos
7. ¿En cuántas secciones está dividido el programa de probabilidad y estadística?	B *Conocimientos de las estrategias y representaciones instruccionales*	II Currículo	1 Programas de curso
8. ¿Cuál son las dificultades que los alumnos presentan en la clase? ¿Por qué?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	I Concepciones	1 Sobre la probabilidad y la estadística
		IV Conocimientos esenciales	1 Conceptos 2 Procesos 4 Principios 5 Vinculación
9. ¿Entre la estadística y la probabilidad, cuál consideras sea más fácil de aprender para los estudiantes?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	IV Conocimientos Esenciales	1 Conceptos 2 Procesos
	B *Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales*	I Concepciones de la E-A	
10. ¿Cuáles son los temas más complicados en el curso? ¿Por qué?	B *Conocimiento de las estrategias y*	I Concepciones de E-A	

	representaciones instruccionales		
11. ¿Existe alguna diferencia entre un curso de PyE y los otros cursos de matemáticas?	A *Conocimientos del contenido matemático a enseñar*	IV Conocimientos esenciales	5 Vinculación
12. ¿Tienes algún modelo para enseñar estadística y probabilidad?	B *Conocimientos de las estrategias y representaciones instruccionales*	I Concepciones de la E-A	
		IV Estrategias de enseñanza específica	

Los significados asociados al Teorema de Bayes			
Pregunta	***Según las respuestas esperadas por los profesores considerando la propuesta de Pinto (2010), Espíndola (2015) y Uc (2014).***		
	Dimensiones del CDC	***Indicadores de los componentes analizados***	***Subindicadores***
13. En tu programa aparece el Teorema de Bayes, ¿Crees que sea posible ubicar el teorema en otra sección del programa?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	III Conocimiento del currículo	1 asignación del Teorema de Bayes
		IV Conocimientos esenciales	4 Principios
14. ¿Cuál es el problema que trata de resolver el Teorema de Bayes?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	IV Conocimientos esenciales	3 Concepto
15. Según tu experiencia ¿Cuál es la dificultad en aprender el Teorema de Bayes?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	IV Conocimiento esenciales	1 conceptos 4 Principios
16. ¿Cuáles son los elementos claves para aprender el teorema de Bayes?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	I Conceptos	3 Sobre el Teorema de Bayes

17. Cuando preparas tu clase ¿Qué esperas que el alumno aprenda?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	IV Conocimientos esenciales	1 Conceptos 2 Procesos 4Principios 5 Vinculación
18. ¿Tienes un modelo o forma de enseñar el teorema de Bayes?	B *Conocimientos de las estrategias y representaciones instruccionales*	I Conceptos IV Estrategias de enseñanza específica	2 Del tópico específico

Los significados asociados al Teorema de Bayes			
Pregunta	***Según las respuestas esperadas por los profesores considerando la propuesta de Pinto (2010), Espíndola (2015) y Uc (2014).***		
	Dimensiones del CDC	***Indicadores de los componentes analizados***	***Subindicadores***
19. ¿Podrías explicarme cómo le hiciste para resolver el problema?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	IV conocimientos esenciales	1 Concepto 3 Formas de representación 4 Vinculación
20. ¿Cómo identificaste cada caso?	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	IV Conocimientos esenciales	
21. ¿Qué tuviste que hacer para distinguir cada tipo de probabilidad? En qué se diferencian cada una de ellas	A *Conocimiento del contenido a enseñar*	IV Conocimientos esenciales	1 3
22 ¿Algo que quieras agregarle al problema? ¿Una opinión al respecto	B *Conocimientos de las estrategias y representaciones instruccionales*	II Currículo IV Estrategias de enseñanza	7