Universidad Autónoma de Yucatán

Facultad de Matemáticas

Una Aplicación de las Formas Canónicas para Matrices Hamiltonianas en la Teoría de las Súper Álgebras de Lie

TESIS

presentada por:

L.M. Lucía Liliane Campa Cardeña

en opción al título de:

Maestra en Ciencias Matemáticas

Directores de tesis:

Dr. Ramón Peniche Mena

Dr. Gil Salgado González

Mérida, Yucatán, México

Noviembre de 2016

Dedicado a

mis padres y hermanas

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a cada una de las personas que de una u otra forma me acompañaron durante estos dos años.

A mis padres, que cuando supieron que quería continuar con mis estudios, aún con sus temores me apoyaron y desearon buena suerte.

A mis hermanas, por impulsarme a alcanzar mis metas, preocuparse por mi y demostrarme su cariño. Sin ustedes dos y mi sobrina mi mundo no tendría color.

A mi familia, tios, abuelos y primos, que me cobijaron, cuidaron y alimentaron. Por hacer mi camino un poco más fácil.

Al Dr. Ramón Peniche Mena, por motivarme a estudiar la maestría. Por creer en mi e impulsarme a continuar a pesar de las adversidades. Nunca hubiese imaginado que mi vida tomaría este rumbo.

Al Dr. Gil Salgado González, por el tiempo dedicado a la realización de esta tesis y por los consejos para no caer en desesperación y perder la cabeza.

A mis compañeros de maestría, por apoyarme cuando más lo necesitaba. Por todas las risas y experiencias vividas.

Mi agradecimiento a la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí por abrirme sus puertas durante mi último semestre. Y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada.

A todos, ¡mi gratitud!

Índice general

Índice de cuadros

Introducción

Fue en 1870 cuando Marie Ennemond Camille Jordan, matemático francés, abordó por primera vez el concepto de lo que hoy conocemos como "las formas canónicas de Jordan" en *Traité des substitutions et des équations algébriques* [1]. Dicho tratado corresponde, en el lenguaje moderno, al problema de cambios de base en el espacio de matrices cuadradas, o dicho de otra manera, se refiere al estudio de la acción por conjugación del grupo general lineal de un espacio vectorial de dimensión finita en el espacio de endomorfismos de ese espacio vectorial.

Una de las aplicaciones a las formas canónicas de Jordan es el Teorema de Jordan-Chevalley, problema que proponía encontrar una base para la cual un endomorfismo dado reduzca lo máximo posible su representación matricial [2].

El trabajo de Jordan consistió en entender las órbitas de la acción por conjugación en los endomorfismos donde el grupo que actúa es el grupo general lineal. Sin embargo, cabe mencionar que este grupo tiene subgrupos de mucho interés. De hecho Hermann Weyl, matemático alemán, menciona en *The Classical Groups: Their Invariants and Representations* [3] que todo subgrupo tiene el derecho de no ser visto sólo como subgrupo de algo más, sino que estos grupos tienen una estructura propia de estudio. En dicho texto se discuten, utilizando conceptos básicos del álgebra, los llamados cuatro grupos clásicos, a saber el grupo general lineal, el grupo especial lineal, el grupo ortogonal y el grupo simpléctico.

En 1936 se dan los primeros estudios en relación a las formas canónicas para matrices relacionadas con el grupo simpléctico descritas en el artículo [4] de John Williamson donde exhibe una lista completa de las posibles formas canónicas para una matriz real simétrica de orden 4; sin embargo, el procedimiento para el cálculo de dichas formas canónicas no es proporcionado.

Es en 1972 cuando Laub y Meyer proporcionan explícitamente bloques canónicos para matrices Hamiltonianas en [5]. Dichos bloques se presentan en términos de la forma canónica para una transformación lineal restringida a eigenespacios generalizados de las transformaciones lineales. En particular, en este artículo son tratados casos no triviales donde la matriz tiene valores propios cero o imaginarios puros usando una extensión de la forma simpléctica.

Más recientemente, en 2014, Duong y Ushirobira, proporcionan en [6] un panorama breve de este problema en términos de parametrizar la descomposición invertible de Fitting de una forma antisimétrica para dar una clasificación para las órbitas conjugadas del grupo de Lie simpléctico en el álgebra de Lie simpléctica y del grupo ortogonal en el álgebra de Lie ortogonal, respectivamente.

Desde la aparición de las técnicas de Jordan hasta la construcción de las formas canónicas para matrices simplécticas y Hamiltonianas han sido publicados a lo largo de más de un siglo, debido a que estas estructuras juegan un papel importante en el análisis y solución de problemas en distintas áreas de las matemáticas y la física; como la Teoría de Control y la Mecánica Cuántica. En Teoría de Control, por ejemplo, la solución a problemas de control óptimo cuadráticos lineales y ecuaciones algebraicas de Riccati pueden ser obtenidas vía el cálculo de subespacios invariantes especiales, y obtener estos subespacios a través de las formas canónicas.

Aún cuando se puede dar un análisis de las formas canónicas de Jordan en cada uno de los grupos clásicos actuando en diferentes espacios, nuestro interés se centra en las formas canónicas para matrices simplécticas y Hamiltonianas [5].

Cabe mencionar que entender las órbitas de la acción por conjugación se relaciona con la idea de clasificar las formas canónicas en determinado espacio. Pero si se cambia el espacio y además se restringe al grupo que actúa, las órbitas sin duda pueden variar.

Dado un espacio vectorial simpléctico, nuestro primer objetivo es proporcionar explícitamente un camino para encontrar la forma canónica de una transformación lineal bajo la acción por conjugación del grupo de Lie simpléctico en su álgebra de Lie utilizando conceptos básicos del álgebra. Nuestro enfoque consiste en entender la interacción de los subespacios cíclicos asociados al conjunto de valores propios de una transformación lineal.

El motivo principal por el cual nos concentramos en este caso se debe a que clasificar un objeto algebraico es muy importante en matemáticas, pero también, ocurre que esta clasificación presenta aplicaciones en la teoría de las superálgebras de Lie.

La teoría de las superálgebras surge en el contexto de la física teórica, que en cierto modo busca comprender el universo y las leyes que lo rigen para unificarlas en una sola, la teoría del todo. Una de las teorías propuestas de la física teórica es la Teoría de las Supercuerdas, esta teoría arranca a principios de los años 70 de un tipo nuevo de simetría geométrica, la supersimetría, la cual intenta explicar todas las partículas y fuerzas fundamentales de la naturaleza. Esta supersimetría dotaba de un marco geométrico común a las partículas subatómicas básicas que se agrupan en dos clases: bosones y fermiones. Incorporando a los fermiones a diferencia de otras teorías. Dicha teoría apunta a que el mundo es entonces supersimétrico y en este contexto es donde nacieron las superálgebras.

Quizás las superálgebras más conectadas con la Física son las de nuestro interés, las superálgebras de Lie. En las superálgebras de Lie los “elementos pares” de la superálgebra corresponden a los bosones y los “elementos impares” a los fermiones.

De hecho, se sabe que las superálgebras de Lie están caracterizadas por un álgebra de Lie, un espacio de representación, una función bilineal y relaciones entre estas “piezas” [7] y [8]. De manera particular, toda álgebra de Lie es espacio de representación para sí misma vía la representación adjunta. El propósito de este trabajo es el de clasificar superálgebras de Lie donde el álgebra de Lie subyacente es el álgebra de Lie Heisenberg actuando vía la representación adjunta en sí misma, mostraremos como un caso de este problema de clasificación se resuelve al entender la acción del grupo de Lie simpléctico en el conjunto de matrices simétricas.

Por último, cabe mencionar que en este documento usaremos conceptos básicos de álgebra lineal y geometría diferencial sin previo aviso para el lector. Un lector interesado en los detalles puede mirar en [9], [10] para los conceptos de álgebra lineal y [11], [12] para los temas de geometría diferencial.

Resumen

En esta tesis se presenta un método para determinar las formas canónicas para matrices Hamiltonianas bajo la acción del grupo de Lie simpléctico. El método proporcionado se sigue utilizando únicamente conceptos de álgebra lineal. Como una aplicación se presenta la clasificación de las superálgebras de Lie basadas en el álgebra de Lie Heisenberg.

En el Capítulo 1, se introducen algunos conceptos elementales a utilizar del álgebra lineal, la teoría de grupos y álgebras de Lie; así como la descripción de las matrices simplécticas y Hamiltonianas.

En el Capítulo 2, se presentan la acciones por conjugación del grupo de Lie simpléctico en su álgebra de Lie en dimensiones 2 y 4 utilizando resultados elementales del álgebra lineal.

Dado que las estrategias utilizadas para hallar las formas canónicas del grupo de Lie simpléctico en dimensiones 2 y 4 no son útiles para determinar las formas canónicas en dimensiones más altas, en el Capítulo 3 se presenta explícitamente un camino para encontrar la forma canónica de una transformación lineal bajo la acción por conjugación del grupo de Lie simpléctico en su álgebra de Lie a través de entender la interacción de los subespacios cíclicos asociados al conjunto de valores propios de una transformación lineal.

Como una aplicación a las acciones del grupo de Lie simpléctico, en el Capítulo 4 se presenta un caso de la clasificación de las superálgebras de Lie basadas en el álgebra de

Lie Heisenberg actuando vía la representación adjunta en sí misma. Se muestra cómo para cierto caso, este problema de clasificación se resuelve al entender la acción del grupo de Lie simpléctico en el conjunto de matrices simétricas.

En el Apéndice A, se presenta la relación entre la acción por conjugación del grupo de Lie Simpléctico en su álgebra de Lie y la acción por congruencia del grupo de Lie Simpléctico en las matrices Hamiltonianas.

Finalmente, en el Apéndice B se muestra como ejemplo la clasificación de las superálgebras de Lie basadas en el álgebra de Lie Heisenberg de dimensión 5 sobre el campo de los números complejos.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, real o complejo, se denota por:

$$\mathrm{End}(V) = \{X : V \to V \mid X \text{ es una transformación lineal}\}, \qquad \text{y}$$

$$\mathrm{GL}(V) = \{g \in \mathrm{End}\ (V) \mid g \text{ es una transformación lineal invertible}\}$$

al conjunto de transformaciones lineales de V en V y al conjunto de transformaciones lineales invertibles de V en V, respectivamente.

Al fijar una base en V, $\mathrm{End}\,(V)$ se puede identificar con el espacio de matrices de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$, esto es, $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$; mientras que $\mathrm{GL}\,(V)$ se puede identificar con el espacio de matrices $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$ con determinante distinto de cero, esto es, $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$.

$$\mathrm{End}\,(V) \longleftrightarrow \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F}),$$

$$\mathrm{GL}\,(V) \longleftrightarrow \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F}) = \{A \mid A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F}),\ \det A \neq 0\}$$

Definición 1.0.1. Sea A un conjunto no vacío y $(g, \cdot)$ un grupo. Una acción de g en A es una función $\mu : G \times A \to A$ tal que

1. $e \cdot x = x \quad \forall x \in A$

2. $(g_1 \cdot g_2) \cdot (x) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \quad \forall x \in A \quad \forall g_1, g_2 \in g$

Decimos que $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$ está relacionado con $B \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$ si existe $g \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$ tal que $g \cdot A = B$. Ésta es una *relación de equivalencia* en $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$; es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva. Las *clases de equivalencia* de la relación anterior se llaman *órbitas* de la acción de $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$ en $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$. A la órbita de A la denotamos por $O_A = \{g \cdot A \mid g \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})\}$.

El teorema de las formas canónicas de Jordan establece que en el conjunto de órbitas por conjugación es posible elegir un representante canónico en cada órbita; es decir, las formas canónicas de Jordan corresponden a la elección de un representante bajo dicha acción. Entonces encontrar las órbitas de la acción por conjugación

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F}) \times \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F}) &\to \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F}) \\ g \cdot A &\mapsto g^{-1} A g \end{aligned}$$

se corresponde a un problema de matrices.

Nuestro interés se centra en cierto subgrupo y subconjunto de $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$ y $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$ respectivamente para los cuales se tenga una acción por conjugación.

Definición 1.0.2. Sea V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, una forma bilineal $B : V \times V \to \mathbb{F}$ es llamada *simétrica* si $B(x, y) = B(y, x)$ para todo $x, y \in V$, B es llamada *antisimétrica* si $B(x, y) = -B(y, x)$ para todo $x, y \in V$. Además, dada B una forma bilineal simétrica o antisimétrica, B es llamada *no degenerada* si para todo $v \in V$ tal que $B(x, v) = 0$ implica que $x = 0$.

Definición 1.0.3. Un *espacio vectorial simpléctico* es un par (V, B) donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$ y $B : V \times V \to \mathbb{F}$ una forma bilineal, antisimétrica y no degenerada en V. Al espacio vectorial simpléctico (V, B) lo denotaremos solo por V.

Definición 1.0.4. Sea $J = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix}$, donde Id_n es la matriz identidad $n \times n$. Una *base simpléctica* para V es una base $\{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$ tal que $B(v_i, v_j) = J_{ij}$.

Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}^{2n}$ y $B(x, y) = x^t Jy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ donde $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{smallmatrix}\right]$ entonces $(\mathbb{R}^{2n}, B)$ es un espacio vectorial simpléctico.

Si $B(x, y) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^{2n}$, entonces el producto interno de vectores $(x^t)(Jy) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Entonces $Jy = 0$ donde $J \neq 0$, por lo tanto $y = 0$. El espacio vectorial $(\mathbb{R}^{2n}, B)$ es conocido como el *espacio vectorial simpléctico estándar.*

Enunciemos ahora un resultado bien conocido.

Proposición 1.0.1. Sea V un espacio vectorial simpléctico, entonces $\dim_{\mathbb{F}} V$ es par.

1.1. Grupos de Lie

Definición 1.1.1. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable G, dotada con aplicaciones diferenciables

$$(\cdot, \cdot) : G \times G \to G \quad \text{y} \quad (\ )^{-1} : G \to G$$

que definan en G una estructura de grupo.

Ejemplos.

1. $\mathbb{F}$ es un grupo de Lie *abeliano* bajo la suma.

2. $\mathbb{F}^* := \mathbb{F} - \{0\}$ es un grupo de Lie abeliano bajo la multiplicación.

3. $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$ es un grupo de Lie.

Sabemos que $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$. Además la función $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ tal que $A \mapsto f(A) := \det(A)$ es diferenciable. Entonces, $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es una variedad diferenciable.

$\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F})$ es un grupo bajo la multiplicación de matrices donde $e = \mathrm{Id}_n$ es el elemento identidad. Además, la multiplicación

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot) : \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F}) &\to \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F}) \\ (A,B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

y la inversa

$$\begin{aligned} (\ )^{-1} : \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F}) &\to \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F}) \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

son diferenciables ya que la multiplicación de matrices está definida como una matriz de polinomios en cada entrada y la inversa es una matriz de funciones racionales donde el denominador nunca se anula. Por lo tanto $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F})$ es un grupo de Lie.

Definición 1.1.2. Una subvariedad H de un grupo de Lie G es un *subgrupo de Lie* de G si H es subgrupo de G.

Definición 1.1.3. Consideremos los isomorfismos $g \in \mathrm{GL}(V)$ que preservan estructura, estos son

$$\mathrm{G}(V) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid B(gx,gy) = B(x,y), \forall x,y \in V\},$$

este es llamado el *grupo simpléctico lineal*, denotado por $\mathrm{Sp}\,(V)$ cuando V es un espacio vectorial simpléctico. En este caso, $g \in \mathrm{Sp}\,(V)$ es llamada *transformación simpléctica.*

Teorema 1.1.1. Si $y \in \mathbb{R}^m$ es valor regular de una función diferenciable f, entonces $M = f^{-1}(y) \subset \mathbb{R}^n$ donde $n > m$ es una $n - m$ variedad diferenciable.

Ejemplo. El grupo simpléctico lineal $\mathrm{Sp}\,(V)$ es subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}\,(V)$.

Sea $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{m^2}$ tal que $A \mapsto A^t JA$, luego f es diferenciable y J es valor regular de f. Por lo tanto $\mathrm{Sp}\,(V) = f^{-1}(J) \subset \mathrm{GL}\,(V)$ es una variedad diferenciable. Ahora, sean $g, h \in \mathrm{GL}\,(V)$, entonces

$$\begin{aligned} B((g \circ h)x, (g \circ h)y) &= B(g(h(x)), g(h(y))) \\ &= B(h(x), h(y)) \\ &= B(x, y) \quad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Sp}\,(V)$ es también cerrado bajo la composición.

Observemos que

$$B((h \circ h^{-1})x, (h \circ h^{-1})y) = B(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

y

$$\begin{aligned} B((h \circ h^{-1})x, (h \circ h^{-1})y) &= B(h(h^{-1}(x)), h(h^{-1}(y))) \\ &= B(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \quad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Sp}\,(V)$ también es cerrado bajo inversos. Es decir, $\mathrm{Sp}\,(V)$ es subgrupo de $\mathrm{GL}\,(V)$.

Definición 1.1.4. Si G y H son grupos de Lie, entonces un *morfismo de grupos de Lie* $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos diferenciable.

Se dice que G y H son *isomorfos* si f es un morfismo de grupos de Lie biyectivo.

Ejemplo. La función $\det : \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}^*$ es un morfismo de grupos de Lie. Ya que

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \quad \forall A, B \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F}).$$

Y es diferenciable, pues para toda $A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$, $\det A$ es un polinomio en las entradas de la matriz A.

1.2. Álgebras de Lie

Definición 1.2.1. Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial de dimensión finita dotado con una operación $[\, , \,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que para toda $x, y, z \in \mathfrak{g}$ se cumple que:

(1) $[\, , \,]$ es bilineal,

(2) $[x, y] = -[y, x]$ (antisimétrica),

(3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identidad de Jacobi).

Ejemplo. Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{F}$, entonces $\mathrm{End}\,(V)$ es un espacio vectorial de dimensión n^2 sobre $\mathbb{F}$. En él definimos la operación $[\, , \,] : \mathrm{End}\,(V) \times \mathrm{End}\,(V) \to \mathrm{End}\,(V)$ tal que

$$[x, y] = xy - yx,$$

donde xy es la composición de las transformaciones lineales x e y. Con esta operación, $\mathrm{End}\,(V)$ adquiere estructura de álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$ ya que $[\, , \,]$ es bilineal, antisimétrica y cumple con la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] \\
&= xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz \\
&\quad -zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para distinguir a $\mathrm{End}\,(V)$ con esta nueva estructura escribimos $\mathfrak{gl}(V)$ y nos referimos a él como el *álgebra lineal general.*

Definición 1.2.2. Una *subálgebra* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[x, y] \in \mathfrak{h}$ para toda $x, y \in \mathfrak{h}$.

Proposición 1.2.1. Dado un espacio vectorial V,

$$\mathfrak{g}(V) = \{A \in \mathrm{End}(V) \mid B(Ax, y) + B(x, Ay) = 0, \forall x, y \in V\},$$

es subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Demostración. Claramente $\mathfrak{g}(V)$ es un subespacio de $\mathfrak{gl}(V)$.

Ahora sean $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}(V)$, entonces

$$\begin{aligned} B([A_1, A_2]x, y) &= B((A_1A_2 - A_2A_1)x, y) \\ &= B(A_1(A_2x), y) - B(A_2(A_1x), y) \\ &= -B(A_2x, A_1y) - B(A_1x, A_2y) \\ &= B(x, A_2(A_1y)) - B(x, A_1(A_2y)) \\ &= -(B(x, A_1A_2y - A_2A_1y)) \\ &= -B(x, [A_1, A_2]y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[A_1, A_2] \in \mathfrak{g}(V)$. □

Definición 1.2.3. Dado un espacio vectorial simpléctico V, $\mathfrak{g}(V)$ es llamada el *álgebra de Lie simpléctica* y la denotamos por $\mathfrak{sp}(V)$. En este caso, $A \in \mathfrak{sp}(V)$ es llamada *transformación Hamiltoniana.*

Es bien sabido, como en [12], que a cada grupo de Lie le podemos asociar un álgebra de Lie y viceversa. A continuación un ejemplo de ello.

Proposición 1.2.2. El álgebra simpléctica $\mathfrak{sp}(V)$ es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie $\mathrm{Sp}\,(V)$.

Demostración. Definamos $\mathfrak{sp}(2n) = T_{\mathrm{Id}}\mathrm{Sp}\,(2n)$. Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Sp}\,(2n)$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = \mathrm{Id}$, para toda s tal que $\alpha(s) \in \mathrm{Sp}\,(2n)$. Entonces $\alpha(s)^t J\alpha(s) = J$ para toda s, por lo tanto $\alpha'(0)^t J + J\alpha'(0) = 0$. Sea $A = \alpha'(0)$, entonces $A^tJ + JA = 0$.

Ahora, sea $A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$ tal que $A^tJ+JA = 0$. Entonces existe una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Sp}\,(2n)$ tal que $\alpha(0) = \mathrm{Id}$ y $\alpha'(0) = A$. □

Definición 1.2.4. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ álgebras de Lie, un *morfismo de álgebras de Lie* es una transformación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tal que

$$\varphi([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{\mathfrak{g}'}.$$

Se dice que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son *isomorfas* si φ es biyectiva.

Ejemplo. La función lineal $\mathrm{Tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathbb{R}$ es un morfismo de álgebras de Lie. Cuando al conjunto $\mathbb{R}$ lo pensamos como el álgebra de Lie abeliana de dimensión 1, esto es, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que $[a,b] = 0$.

Definición 1.2.5. Una *representación* ρ de $\mathfrak{g}$ en V es un morfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V).$$

Proposición 1.2.3. Sea $\mathfrak{g}$ un algebra de Lie, entonces $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definida por $\rho(x) = \mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{ad}_x(y) = [x,y]$ es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$.

Demostración. Debemos ver que $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es una representación, es decir, que es un morfismo de álgebras de Lie.

Sean $x, y \in \mathfrak{g}$, veamos que $\rho([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [\rho(x), \rho(y)]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}$.
Observemos que $\rho([x,y]_{\mathfrak{g}})(z) = \mathrm{ad}_{[x,y]_{\mathfrak{g}}}(z) = [[x,y],z]$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
[\rho(x), \rho(y)]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} &= [\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)](z) \\
&= \rho(x)(\rho(y)(z)) - \rho(y)(\rho(x)(z)) \\
&= \mathrm{ad}_x(\mathrm{ad}_y(z)) - \mathrm{ad}_y(\mathrm{ad}_x(z)) \\
&= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\
&= [[x,y],z]
\end{aligned}$$

para toda $z \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto $\rho([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [\rho(x), \rho(y)]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}$.

De aquí se sigue que ρ es un morfismo de álgebras de Lie y por tanto, una representación. Esta representación ρ es llamada *representación adjunta*. $\square$

De ahora en adelante, a menos que digamos lo contrario, todos los espacios vectoriales son simplécticos, sobre el campo $\mathbb{F}$ de los números reales o complejos, y de dimensión finita.

Es bien conocido el hecho de que el grupo simpléctico lineal $\mathrm{Sp}\,(V)$ actúa en el álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(V)$ vía la representación adjunta. La *acción derecha por conjugación* de $\mathrm{Sp}\,(V)$ sobre $\mathfrak{sp}(V)$ está dada por

$$\mathrm{Sp}\,(V) \times \mathfrak{sp}(V) \to \mathfrak{sp}(V)$$
$$(g, A) \mapsto g \cdot A = g^{-1}Ag$$

Y está bien definida, ya que si $g \in \mathrm{Sp}\,(V)$ y $A \in \mathfrak{sp}(V)$ entonces

$$\begin{aligned} B((g^{-1}Ag)x, y) &= B((g^{-1}Ag)x, g^{-1}gy) \\ &= B(Agx, gy) \\ &= -B(gx, gg^{-1}Agy) \\ &= -B(x, (g^{-1}Ag)y) \end{aligned}$$

para toda $x, y \in V$. Por lo tanto, $g^{-1}Ag \in \mathfrak{sp}(V)$.

1.3. Descripción de Sp (V) y $\mathfrak{sp}(V)$

El grupo de Lie simpléctico estándar $(\mathbb{R}^{2n}, *)$, esto es, el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ junto con el producto usual, será denotado por $\mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{R})$ y puede ser identificado con el grupo de Lie lineal $\{g \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R}) \mid g^tJg = J\}$. Decimos que $g \in \mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{R})$ es una *matriz simpléctica.*

En efecto, si $g \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$ tal que $B(gx, gy) = B(x, y)$, entonces $(gx)^tJ(gy) = x^tJy$, luego $x^t(g^tJg)y = x^tJy$ para toda $x, y \in V$. Por lo tanto, $g^tJg = J$.

Proposición 1.3.1. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$ una base simpléctica para V, se sigue que $g = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{R})$ si $X^tZ = Z^tX$, $W^tY = Y^tW$, y $X^tW - Z^tY = \mathrm{Id}_n$ donde $X, Y, Z, W \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$.

Demostración. Si escribimos a g en la base $\{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$,

$$g = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \text{ con } X, Y, Z, W \text{ matrices de } n \times n,$$

entonces la condición $B(gx, gy) = B(x, y)$ implica que $(gx)^t J(gy) = x^t Jy$. Luego $x^t g^t Jgy = x^t Jy$, de donde

$$g^t Jg = J.$$

En términos de matrices

$$\begin{bmatrix} X^t & Z^t \\ Y^t & W^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

De aquí observamos que $-Z^t X + X^t Z = 0$, $-Z^t Y + X^t W = \mathrm{Id}_n$ y $-W^t Y + Y^t W = 0$. Y entonces,

$$\begin{aligned} X^t Z &= Z^t X, \\ X^t W - Z^t Y &= \mathrm{Id}_n, \\ W^t Y &= Y^t W. \end{aligned}$$

□

El álgebra de Lie simpléctica estándar $(\mathbb{R}^{2n}, +, *)$, esto es, el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ junto con la suma y producto usual, será ahora denotado por $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$, y puede ser identificado con el álgebra de Lie lineal $\{A \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R}) \mid A^t J + JA = 0\}$. Y decimos que la matriz de representación $A \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ es una *matriz Hamiltoniana.*

En efecto, si $A \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$ tal que $B(Ax, y) + B(x, Ay) = 0$, entonces $(Ax)^t Jy + x^t J(Ay) = 0$, luego $x^t A^t Jy + x^t JAy = x^t(A^t J + JA)y = 0$ para toda $x, y \in V$. Por lo tanto, $A^t J + JA = 0$.

Proposición 1.3.2. Sea $\{e_1, e_2, ..., e_{2n}\}$ una base simpléctica, se sigue que $A = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ si $n^t = n$, $p^t = p$, y $q = -m^t$, donde $m, n, p, q \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$.

Demostración. Si escribimos a A en la base $\{e_1, e_2, ..., e_{2n}\}$,

$$A = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \text{ con } m, n, p, q \text{ matrices de } n \times n,$$

entonces la condición $B(Ax, y) + B(x, Ay) = 0$, implica que $B(Ax, y) = -B(x, Ay)$. Donde $B(x, y) = x^t J y$ y entonces

$$\begin{aligned} (Ax)^t J y &= -x^t J A y, \\ x^t A^t J y &= -x^t J A y, \\ A^t J &= -J A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si A es una matriz Hamiltoniana, se sigue que $A^t J = -JA$ y $J^2 = -\mathrm{Id}_{2n}$.

En términos de matrices, la condición $JA = -A^t J$ implica que, multiplicando por bloques dichas matrices, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m^t & p^t \\ n^t & q^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Y entonces $p = p^t$, $q = -m^t$, $n = -n^t$. Observemos que esto obliga a que $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$. □

Capítulo 2

Acción por conjugación en dimensiones bajas

2.1. Acción por conjugación de $\mathbf{Sp}\,(2,\mathbb{F})$ sobre $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{F})$

Para hallar las formas canónicas bajo la acción por conjugación del grupo simpléctico de dimensión 2, utilizaremos una teoría similar a la de Jordan-Chevalley. Encontrar el polinomio característico y a través de éste las órbitas correspondientes.

Teorema 2.1.1. Sea A una matriz de $n \times n$ con n distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Entonces existe una matriz invertible Q tal que $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Lema 2.1.1. Las formas canónicas de Jordan bajo $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F})$ y $\mathrm{SL}\,(n,\mathbb{F})$ en $\mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{F})$ son las mismas.

Demostración. Recordemos que las formas canónicas de Jordan de una matriz corresponden a la elección de un representante bajo la acción por conjugación de $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F})$ en $\mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{F})$,

$$\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F}) \times \mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{F}) \to \mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{F})$$

$$g \cdot A \mapsto g^{-1}Ag$$

Y que al restringir la acción de $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$ a $\mathrm{SL}\,(n, \mathbb{F})$, tenemos aún una acción por conjugación de $\mathrm{SL}\,(n, \mathbb{F})$ en $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$,

$$\mathrm{SL}\,(n, \mathbb{F}) \times \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F}) \to \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$$

$$h \cdot A \mapsto h^{-1}Ah$$

Ahora, sea $g \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$ tal que $\det(g) = \frac{1}{\lambda^n} \neq 0$. Y sea $h \in \mathrm{SL}\,(n, \mathbb{F})$ tal que $h = \lambda g$. Entonces, si $\det(g) > 0$ y n es par, $\det(h) = \det(\lambda g) = \lambda^n \det g = 1$. Y si $\det(g) < 0$ y n es impar, $\det(h) = \det(\lambda g) = \lambda^n \det g = 1$. En otro caso, $\det(h) = -1$ y $h \notin \mathrm{SL}\,(n, \mathbb{F})$.

Observemos que, para toda $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$, $h^{-1}Ah = (\frac{1}{\lambda}g^{-1})A(\lambda g) = g^{-1}Ag$. Dado que en ambos casos tenemos las mismas órbitas, podemos concluir que las formas canónicas de Jordan para $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F})$ y $\mathrm{SL}\,(n, \mathbb{F})$ bajo $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{F})$ son las mismas. □

Lema 2.1.2. $\mathrm{SL}\,(2, \mathbb{F}) = \mathrm{Sp}\,(2, \mathbb{F})$.

De acuerdo a los Lemas 2.1.1 y 2.1.2, tenemos entonces las mismas formas canónicas para $\mathrm{GL}\,(2, \mathbb{F})$ y $\mathrm{SL}\,(2, \mathbb{F}) = \mathrm{Sp}\,(2, \mathbb{F})$ en $\mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{F})$. Por lo que al restringirnos a $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{F}) \subset \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{F})$ subespacio de $\mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{F})$ continuamos con dichas formas canónicas.

Calculemos ahora el polinomio característico. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{F}$. Luego,

$$p_A(\lambda) \;=\; \lambda^2 - (\mathrm{Tr}\, A)\lambda + (\det A).$$

Ya que $A \in \mathfrak{sp}(2, \mathbb{F})$, entonces $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ y $\mathrm{Tr}\, A = 0$. Luego $p_a(\lambda) = \lambda^2 + \det A$ y por tanto los valores propios de A pueden ser dados de la siguiente manera:

$$\lambda = \pm\sqrt{-\det A}.$$

Y entonces, tenemos que verificar si el término $-\det A$ es positivo, negativo o cero.

1. Si $-\det A > 0$, las raíces del polinomio característico

$$\lambda_1 = \sqrt{-\det A} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\sqrt{-\det A}$$

   son valores propios reales distintos.

2. Si $-\det A < 0$, las raíces del polinomio característico

$$\lambda = \sqrt{\det A}\ i \quad \text{y} \quad \overline{\lambda} = -\sqrt{\det A}\ i$$

   son números complejos conjugados.

3. Si $-\det A = 0$, existe solo una raíz para el polinomio característico

$$\lambda = 0.$$

A continuación resumimos las posibles matrices asociadas a Sp $(2,\mathbb{F})$.

- Si $\det A < 0$, tenemos raíces reales distintas y entonces

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-\det A} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\det A} \end{bmatrix}.$$

- Si $\det A = 0$, tenemos raíces reales repetidas y si A es diagonalizable, entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Si $\det A = 0$, tenemos raíces reales repetidas y si A no es diagonalizable, entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Si $\det A > 0$, tenemos raíces complejas conjugadas y entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\det A} \\ -\sqrt{\det A} & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Acción por conjugación de Sp $(4,\mathbb{F})$ sobre $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{F})$

En la sección anterior, fue sencillo encontrar las formas canónicas para matrices Hamiltonianas de 2×2 ya que $\mathrm{Sp}\,(2,\mathbb{F}) = \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{F})$, y las formas canónicas de $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{F})$ y $\mathrm{SL}\,(n,\mathbb{F})$ son las mismas. Sin embargo, ya no es posible utilizar estos resultados para matrices Hamiltonianas de 4×4 ya que $\mathrm{Sp}\,(4,\mathbb{F}) \subsetneq \mathrm{SL}\,(4,\mathbb{F})$.

A continuación presentaremos las soluciones explícitas al polinomio característico para matrices Hamiltonianas de 4×4 en términos de dos invariantes: la traza y el determinante de matrices. Con el fin de dar las soluciones, primero observemos que,

Proposición 2.2.1. Sea A una matriz Hamiltoniana y $\alpha = a+ib$ raíz de $p_A(\lambda)$, entonces $-\alpha, \overline{\alpha}$ y $-\overline{\alpha}$ son también raíces de $p_A(\lambda)$.

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= p_{A^T}(\lambda) = \det(I-\lambda A^T) \\
&= \det(I-\lambda JAJ) \\
&= \det(-J^2-\lambda JAJ) \\
&= (-1^{2n})\det(JIJ+\lambda JAJ) \\
&= \det(J(I+\lambda A)J) \\
&= \det(I+\lambda A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $p_A(\alpha) = 0$ entonces $\det(I+\lambda A) = 0$, lo cual implica que $\det(I-(-\alpha)A) = 0$ y se sigue que $-\alpha$ es también raíz de $p_A(\lambda) = 0$. Además, $p_A(\overline{\alpha}) = \overline{p_A(\alpha)} = 0$ y $p_A(-\overline{\alpha}) = \overline{p_A(-\alpha)} = 0$. Por lo tanto $-\alpha, \overline{\alpha}$ y $-\overline{\alpha}$ son también raíces de $p_A(\lambda)$. □

Proposición 2.2.2. Si A es una matriz Hamiltoniana de 4×4, el polinomio característico está dado por

$$p_A(\lambda) = \lambda^4 - \Big(\frac{\mathrm{Tr}\,(A^2)}{2}\Big)\lambda^2 + \det(A).$$

Demostración. El polinomio característico $p_A(\lambda)$ puede ser definido como

$$p_A(\lambda) = \lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4.$$

Se sabe que el término constante c_4 de $p_A(\lambda)$ es igual a $(-1)^4 \det A$.

Ahora, sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ raíces de $p_A(\lambda)$. De la identidad de Newton, $S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k + \alpha_4^k$, $k \in \mathbb{N}$, la suma de las potencias k de las raíces de $p_A(\lambda)$. Entonces, de acuerdo al Teorema Fundamental del Álgebra,

$$p_A(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4),$$

luego

$$p'_A(x) = \frac{p_A(x)}{x-\alpha_4} + \frac{p_A(x)}{x-\alpha_3} + \frac{p_A(x)}{x-\alpha_2} + \frac{p_A(x)}{x-\alpha_1}.$$

Y es posible calcular cada sumando utilizando división sintética. Dado que $p_A(x) = x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{p_A(x)}{x-\alpha_4} &= x^3 + (c_1+\alpha_4)x^2 + (c_2 + c_1\alpha_4 + \alpha_4^2)x + (c_3 + c_2\alpha_4 + c_1\alpha_4^2 + \alpha_4^3),\\
\frac{p_A(x)}{x-\alpha_3} &= x^3 + (c_1+\alpha_3)x^2 + (c_2 + c_1\alpha_3 + \alpha_3^2)x + (c_3 + c_2\alpha_3 + c_1\alpha_3^2 + \alpha_3^3),\\
\frac{p_A(x)}{x-\alpha_2} &= x^3 + (c_1+\alpha_2)x^2 + (c_2 + c_1\alpha_2 + \alpha_2^2)x + (c_3 + c_2\alpha_2 + c_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3),\\
\frac{p_A(x)}{x-\alpha_1} &= x^3 + (c_1+\alpha_1)x^2 + (c_2 + c_1\alpha_1 + \alpha_1^2)x + (c_3 + c_2\alpha_1 + c_1\alpha_1^2 + \alpha_1^3),
\end{aligned}$$

luego, $p'_A(x) = 4x^3 + (4c_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x^2 + (4c_2 + c_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)x + 4c_3 + c_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + c_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \alpha_4^3$.

Mientras que $p'_A(x)$ también puede ser vista como $p'_A(x) = 4x^3 + 3c_1x^2 + 2c_2x + c_3$. De manera que, igualando coeficientes en ambas formas de $p'_A(x)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} c_1 &= -S_1, \\ c_2 &= -\frac{1}{2}(S_2 + S_1 c_1), \\ c_3 &= -\frac{1}{3}(S_3 + S_2 c_1 + S_1 c_2). \end{aligned}$$

De las formas canónicas de Jordan sabemos que existe una matriz invertible g tal que $g^{-1}Ag = D + N$, donde D es la matriz con los valores propios de A en la diagonal y ceros fuera de ella, y N una matriz *nilpotente*; es decir, una matriz triangular superior con ceros en la diagonal. Además $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(g^{-1}Ag)$ y $\mathrm{Tr}\,(g^{-1}Ag) = \mathrm{Tr}\,(D+N)$, entonces $\mathrm{Tr}\,(A^k) = \mathrm{Tr}\,((D+N)^k)$.

Del binomio de Newton tenemos que

$$(D+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j}N^j = D^k + \binom{k}{1} D^{k-1}N + \cdots \binom{k}{k} N^k,$$

de donde podemos observar que $\mathrm{Tr}\,(D^{k-j}N^j) = 0$ para toda $j = 1, \cdots k$.

Por lo tanto $\mathrm{Tr}\,(A^k) = \mathrm{Tr}\,(D^k) = S^k$.

Además, es fácil ver que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es valor propio de A, entonces $\alpha^n + \overline{\alpha}^n \in \mathbb{R}$. Luego, para $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{F})$ se sigue que $c_1 = -\mathrm{Tr}\, A = 0$ y $c_2 = -\dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^2)$.

Observemos que, de la Proposición 2.2.1, si $\alpha_1 = a + ib$ es una raíz $p_A(\lambda)$ tal que $a, b \neq 0$, entonces $-\alpha_1, \overline{\alpha_1}$ y $\overline{-\alpha_1}$ son también raíces de $p_A(\lambda)$. En este caso,

$$S_3 = \alpha_1^3 + (-\alpha_1)^3 + \overline{\alpha_1}^3 + (\overline{-\alpha_1})^3 = 0.$$

Y si $\alpha_1 = a + ib$ es una raíz $p_A(\lambda)$ tal que $a = 0$ ó $b = 0$, entonces $-\alpha_1$ es también una raíz de $p_A(\lambda)$. Como $p_A(\lambda)$ es un polinomio de grado 4, tenemos que $\alpha_2 = c + id$ tal que $c = 0$ ó $d = 0$ es también raíz de $p_A(\lambda)$ y entonces $-\alpha_2$ también es raíz de $p_A(\lambda)$. En este caso,

$$S_3 = \alpha_1^3 + (-\alpha_1)^3 + \alpha_2^3 + (-\alpha_2)^3 = 0.$$

Luego, se sigue que

$$\begin{aligned} c_1 &= 0\,, \\ c_2 &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^2), \\ c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_A(\lambda) = \lambda^4 - \Big(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^2)\Big)\lambda^2 + \det(A).$$

□

Ahora, para encontrar las raíces de $p_A(\lambda)$ sabemos que la única posibilidad para la que $\alpha = 0$ sea raíz de $p_A(\lambda)$ es, si y sólo si $\det(A) = 0$. Y entonces $p_A(\alpha) = 0$, por lo que consideraremos primero este caso. Notemos que si $\mathrm{Tr}\,(A^2) = 0$, entonces

$$p_A(\alpha) = \alpha^4 - \Big(\frac{1}{2}(0)\Big)\alpha^2 = \alpha^4 = 0,$$

es decir, $\alpha = 0$ es una raíz con multiplicidad 4.

Consideremos ahora los casos en los que $\mathrm{Tr}\,(A^2) \neq 0$:

Si $\mathrm{Tr}\,(A^2) > 0$ y $p_A(\alpha) = \alpha^4 - \Big(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^2)\Big)\alpha^2 = 0$, entonces

$$\alpha^2\Big(\alpha^2 - \frac{\mathrm{Tr}\,(A^2)}{2}\Big) = 0.$$

Por lo que si $\alpha^2 = 0$ entonces, $\alpha = 0$ es una raíz de $p_A(\lambda)$ con multiplicidad 2.

Y si $\alpha^2 - \frac{\mathrm{Tr}\,(A^2)}{2} = 0$, entonces $\alpha = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Tr}\,(A^2)}{2}}$ es una raíz de $p_A(\lambda)$.

Y si $\mathrm{Tr}\,(A^2) < 0$ y $p_A(\alpha) = \alpha^4 - \Big(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^2)\Big)\alpha^2 = 0$ entonces, como en el caso anterior, $\alpha = 0$ es una raíz de $p_A(\lambda)$ con multiplicidad 2.

Y si $\alpha^2 - \frac{\mathrm{Tr}\,(A^2)}{2} = 0$, entonces $\alpha = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Tr}\,(A^2)}{2}}\; i$ es una raíz de $p_A(\lambda)$.

Resumimos las posibles soluciones de este caso en el Cuadro 2.1.

Raíces	**Característica de las raíces**	**Condiciones**
0	multiplicidad 4	$\det(A) = 0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2) = 0$
0	multiplicidad 2	$\det(A) = 0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2) > 0$
$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Tr}\,(A^2)}{2}}$	números reales	$\det(A) = 0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2) > 0$
0	multiplicidad 2	$\det(A) = 0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2) < 0$
$\alpha = \pm\sqrt{\frac{-\mathrm{Tr}\,(A^2)}{2}}\ i$	números complejos	$\det(A) = 0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2) < 0$

Cuadro 2.1: Posibles raíces de $p_A(\lambda)$ cuando $\det(A) = 0$.

Cuando $\det(A) \neq 0$, el caso $\alpha = 0$ no es posible.

De la Proposición 2.2.2 se sigue que, si

$$p_A(\alpha) = \alpha^4 - \Big(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^2)\Big)\alpha^2 + \det(A) = 0,$$

entonces

$$\alpha^2 \;=\; \frac{\mathrm{Tr}\,(A^2) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}}{4}.$$

Si $\det(A) < 0$, entonces $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A) > 0$. Y ya que $\mathrm{Tr}\,(A^2) = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2}$ y $-16\det(A) > 0$, entonces $\mathrm{Tr}\,(A^2) < \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}$.

Notemos que $\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0$, en otro caso $\det(A) \geq 0$, lo cual contradice la primera hipótesis. Por lo tanto, en este caso no existe restricción en el valor de $\mathrm{Tr}\,(A^2)$.

De manera que, si $\det(A) < 0$ y $\alpha^2 = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(A^2) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}}{4}$, entonces

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}}}{2}.$$

Y si el valor en la raíz cuadrada es negativa,

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}}}{2}\, i.$$

Las raíces de $p_A(\lambda)$ son descritas en el Cuadro 2.2.

Raíces	**Característica de las raíces**	**Condiciones**
$\pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)\pm\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2-16\det(A)}}}{2}$	números reales	$\det(A) < 0$
$\pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)\pm\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2-16\det(A)}}}{2}\, i$	números complejos	$\det(A) < 0$

Cuadro 2.2: Posibles raíces de $p_A(\lambda)$ cuando $\det(A) < 0$.

Pero cuando $\det(A) > 0$ tenemos que verificar si el término $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)$ es positivo, negativo o cero.

(1) Si $\mathrm{Tr}\,(A^2) - 16\det(A) > 0$, luego $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 > 16\det(A)$.

Y entonces podemos observar que $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 > \mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)$, luego entonces $\pm\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2} > \pm\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}$. Por lo que

$$\pm\mathrm{Tr}\,(A^2) > \pm\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)},$$

y se sigue que

$$\pm\mathrm{Tr}\,(A^2) \mp \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0.$$

Es decir,

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) \mp \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0 \quad \text{y}$$
$$-\mathrm{Tr}\,(A^2) \mp \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0.$$

- Si $\mathrm{Tr}\,(A^2) \mp \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0$, tenemos que

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0 \quad \text{y}$$
$$\mathrm{Tr}\,(A^2) - \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0.$$

- Si $-\mathrm{Tr}\,(A^2) \mp \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0$, tenemos que

$$-\mathrm{Tr}\,(A^2) - \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0 \quad \text{y}$$

$$-\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0,$$

  luego

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} < 0 \quad \text{y}$$

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) - \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} < 0.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} \quad \text{y}$$

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) - \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}$$

deben tener el mismo signo.

De manera que si $\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0$ y $\mathrm{Tr}\,(A^2) - \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} > 0$, entonces las raíces de $p_A(\lambda)$

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}}}{2}$$

y

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) - \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}}}{2}$$

son números reales.

Si

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} < 0 \quad \text{y}$$

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) - \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)} < 0,$$

entonces las raíces de $p_A(\lambda)$ son

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) + \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}}}{2}\,i$$

y

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) - \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A)}}}{2}\, i$$

son números complejos.

(2) Si $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A) < 0$, entonces $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 < 16\det(A)$ y $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 \geq 0$, por lo que $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2$ está restringida a $0 \leq \mathrm{Tr}\,(A^2)^2 < 16\det(A)$.

De manera que las raíces de $p_A(\lambda)$ serán números complejos.

De hecho, es posible observar que la condición $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A) < 0$ puede ser escrita como:

$$\Big(\mathrm{Tr}\,(A^2) + 4\sqrt{\det(A)}\Big)\Big(\mathrm{Tr}\,(A^2) - 4\sqrt{\det(A)}\Big) < 0.$$

De manera que

$$\alpha = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2\mathrm{Tr}\,(A^2) \pm 2\sqrt{\Big(\mathrm{Tr}\,(A^2) + 4\sqrt{\det(A)}\Big)\Big(\mathrm{Tr}\,(A^2) - 4\sqrt{\det(A)}\Big)}}.$$

Sea $A = 2\mathrm{Tr}\,(A^2)$ y $B = \Big(\mathrm{Tr}\,(A^2) + 4\sqrt{\det(A)}\Big)\Big(\mathrm{Tr}\,(A^2) - 4\sqrt{\det(A)}\Big)$, entonces

$$\alpha = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}.$$

Para radicales jerarquizados cuadrados:

$$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \quad \text{si y solo si} \quad x + y = A \quad \text{y} \quad xy = B.$$

Si $x = \mathrm{Tr}\,(A^2) + 4\sqrt{\det(A)}$ y $y = \mathrm{Tr}\,(A^2) - 4\sqrt{\det(A)}$, tenemos que

$$\alpha = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) + 4\sqrt{\det(A)}} \pm \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) - 4\sqrt{\det(A)}}\Big).$$

Y el signo en los factores implica dos casos a verificar:

Si $\mathrm{Tr}\,(A^2) + 4\sqrt{\det(A)} < 0$ entonces,

$$-4\sqrt{\det(A)} - \mathrm{Tr}\,(A^2) > 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Tr}\,(A^2) - 4\sqrt{\det(A)} > 0.$$

Por lo que las raíces de $p_a(\lambda)$ están dadas por

$$\alpha = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) - 4\sqrt{\det(A)}} \pm \sqrt{-4\sqrt{\det(A)} - \mathrm{Tr}\,(A^2)}\, i\right).$$

Y si $\mathrm{Tr}\,(A^2) + 4\sqrt{\det(A)} > 0$ entonces,

$$\mathrm{Tr}\,(A^2) - 4\sqrt{\det(A)} < 0,$$

luego $4\sqrt{\det(A)} - \mathrm{Tr}\,(A^2) > 0$. Por lo que las raíces de $p_a(\lambda)$ están dadas por

$$\alpha = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2) + 4\sqrt{\det(A)}} \pm \sqrt{4\sqrt{\det(A)} - \mathrm{Tr}\,(A^2)}\, i\right).$$

(3) Si $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 - 16\det(A) = 0$, entonces $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2 = 16\det(A)$ y se obtiene que $\mathrm{Tr}\,(A) = \pm 4\sqrt{\det(A)}$.

Por lo que si $\mathrm{Tr}\,(A) = 4\sqrt{\det(A)}$, entonces $\alpha = \pm\sqrt[4]{\det(A)}$.

Y si $\mathrm{Tr}\,(A) = -4\sqrt{\det(A)}$, entonces $\alpha = \pm\sqrt[4]{\det(A)}\, i$. Es decir, las raíces de $p_A(\lambda)$ son números reales o imaginarios pero en cualquiera de los casos, son raíces repetidas.

Resumimos este caso en el Cuadro 2.3.

Raíces	**Características de las raíces**	**Condiciones**
$\pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)+\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2-16\det(A)}}}{2}$ $\pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)-\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2-16\det(A)}}}{2}$	dos diferentes números reales	$\det(A)>0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2>16\det(A)$ ambos>0
$\pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)+\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2-16\det(A)}}}{2}\,i$ $\pm\frac{\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)-\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)^2-16\det(A)}}}{2}\,i$	dos diferentes números imaginarios	$\det(A)>0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2>16\det(A)$ ambos<0
$\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)+4\sqrt{\det(A)}}\pm\sqrt{4\sqrt{\det(A)}-\mathrm{Tr}\,(A^2)}\,i\right)$	números complejos	$\det(A)>0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2\leq 16\det(A)$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)+4\sqrt{\det(A)}>0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)-4\sqrt{\det(A)}<0$
$\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)-4\sqrt{\det(A)}}\pm\sqrt{-4\sqrt{\det(A)}-\mathrm{Tr}\,(A^2)}\right)i$	números complejos	$\det(A)>0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)^2\leq 16\det(A)$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)+4\sqrt{\det(A)}<0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)-4\sqrt{\det(A)}>0$
$\pm\sqrt[4]{\det(A)}$	números reales con raíces repetidas	$\det(A)>0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)=4\sqrt{\det(A)}$
$\pm\sqrt[4]{\det(A)}\,i$	números complejos con raíces repetidas	$\det(A)>0$ $\mathrm{Tr}\,(A^2)=-4\sqrt{\det(A)}$

Cuadro 2.3: Posibles raíces de $p_A(\lambda)$ cuando $\det(A)>0$.

A continuación resumimos las posibles matrices asociadas a $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{F})$.

- Raíz compleja $\alpha = a + ib$
$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & b \\ 0 & 0 & -b & -a \end{bmatrix}.$$

- Raíz imaginaria pura (distintas) $\alpha = ib_1$, $\beta = ib_2$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Raíz imaginaria pura (repetidas) $\alpha = \beta = ib_1$
$$\begin{bmatrix} 0 & \pm b_1 & 0 & 0 \\ \mp b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp b_1 \\ 0 & 0 & \pm b_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Raíz imaginaria pura y raíz real $\alpha = ib_1$, $\beta = a$
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Raíz real (distintas) $\alpha = a$, $\beta = b$
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

- Raíz real (repetidas) $\alpha = \beta = a$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ \delta & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

- Raíz cero (multiplicidad 4) $\alpha = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 3

Acción por conjugación de Sp $(2n, \mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$

Dado un espacio vectorial simpléctico, el objetivo de este capítulo es proporcionar explícitamente un camino para encontrar la forma canónica de una transformación lineal bajo la acción por conjugación del grupo simpléctico en su álgebra de Lie utilizando conceptos básicos del álgebra. Esto a través de entender la interacción de los subespacios cíclicos asociados al conjunto de valores propios de una transformación lineal.

3.1. Preliminares

Sea $B : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, antisimétrica y no degenerada en un espacio vectorial V de dimensión $2n$. Entonces decimos que B es una *geometría simpléctica* en V. Para cada endomorfismo $X \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$, sea $\sigma(X)$ el espectro de X, esto es, el conjunto de todos los valores propios de $X : V \to V$. Supongamos que X tiene k valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \sigma(X)$ (no necesariamente distintos) y consideremos la descomposición de V en términos de sus subespacios generalizados V_{λ_i} asociados a $\sigma(X)$:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} \text{ con } \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Además, cada V_{λ_i} se descompone en términos de sus subespacios cíclicos $V_{\lambda_i}^{n_r^i}$,

$$V_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}^{n_1^i} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_i}^{n_{l_i}^i} \text{ donde } \dim(V_{\lambda_i}^{n_r^i}) = n_r \text{ y } r = 1, ..., l_i.$$

Por lo que tenemos ahora una descomposición de V en términos de sus subespacios cíclicos, esta es

$$V = \left(V_{\lambda_1}^{n_1^1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_1}^{n_{l_1}^1}\right) \oplus \cdots \oplus \left(V_{\lambda_s}^{n_1^s} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}^{n_{l_s}^s}\right).$$

Redefinamos estos subespacios cíclicos para simplificar la notación, de modo que la descomposición de V en términos de sus subespacios cíclicos es de la forma:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r},$$

donde $V_{\lambda_1} := V_{\lambda_1}^{n_1^1}$, $V_{\lambda_2} := V_{\lambda_1}^{n_2^1}$,...,$V_{\lambda_r} := V_{\lambda_s}^{n_{l_s}^s}$.

Es un hecho bien conocido que cada V_{λ_i} es un $(X - \lambda_i \mathrm{Id}\,|_{V_{\lambda_i}})$-subespacio invariante de V. Entonces, el Teorema de las formas canónicas de Jordan implica la existencia de una matriz de Jordan para cada V_{λ_i} asociada a $X : V \to V$, $[X|_{V_{\lambda_i}}]$ donde cada uno de estos bloques no son necesariamente distintos.

Es decir, para cada subespacio cíclico V_{λ_i}, existe $\{e_1^i, \ldots, e_{m_i}^i\}$ base cíclica tal que $X|_{V_{\lambda_i}} : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ satisface

$$X(e_1^i) = \lambda_i e_1^i \quad \text{y} \quad X(e_k^i) = \lambda_i e_k^i + e_{k-1}^i,$$

para $2 \leq k \leq m_i$. En esta base, la matriz asociada a $X|_{V_{\lambda_i}} : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ está dada por

$$[X|_{V_{\lambda_i}}] = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Sea $m_i = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_i}$, luego $[X|_{V_{\lambda_i}}] = \lambda_i \mathrm{Id}_{m_i} + N_{m_i}$, donde $\mathrm{Id}_{m_i} \in \mathrm{Mat}\,(m_i, \mathbb{R})$ denota la matriz identidad y $N_k \in \mathrm{Mat}\,(k, \mathbb{R})$ denota a la matriz

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, dada una geometría simpléctica $B : V \times V \to \mathbb{R}$ en V, nuestra estrategia para resolver el problema es entender primero cómo interactúan los subespacios cíclicos V_{λ_i} entre sí, ya que el espacio total V es suma directa de ellos.

Por simplicidad para los siguientes cálculos, en cada subespacio cíclico V_{λ_i} se fija una base $\{e_1^i, \dots, e_{m_i}^i\}$, y se define $e_0^i := 0$ para todo $1 \le i \le r$.

Lema 3.1.1. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$ con $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(X)$ (no necesariamente distintos). Sea V_{λ_i} y V_{λ_j} subespacios cíclicos de V asociados a λ_i y λ_j, respectivamente. Si $\{e_1^i, \dots, e_{m_i}^i\}$ y $\{e_1^j, \dots, e_{m_j}^j\}$ son bases cíclicas de V_{λ_i} y V_{λ_j}, respectivamente, entonces

$$(\lambda_i + \lambda_j) B(e_k^i, e_l^j) = -B(e_{k-1}^i, e_l^j) - B(e_k^i, e_{l-1}^j),$$

para todo $1 \le k \le m_i$ y $1 \le l \le m_j$.

Demostración. Como $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$ entonces $B(Xu, v) + B(u, Xv) = 0$, para todo $u, v \in V$. Basta tomar $u = e_k^i$ para todo $1 \le k \le m_i$ y $v = e_l^j$ para todo $1 \le l \le m_j$. $\square$

Proposición 3.1.1. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$ tal que $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(X)$ (no necesariamente distintos). Sean V_{λ_i} y V_{λ_j} los subespacios cíclicos de V asociados a λ_i y λ_j, respectivamente.

1. Si $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, entonces la restricción $B|_{V_{\lambda_i} \times V_{\lambda_j}} : V_{\lambda_i} \times V_{\lambda_j} \to \mathbb{R}$ es idénticamente cero.

2. Si $\lambda_i + \lambda_j = 0$ y la restricción $B|_{(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})\times(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})} : (V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})\times(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j}) \to \mathbb{R}$ no degenera, entonces existen bases para V_{λ_i} y V_{λ_j} para las cuales la matriz asociada a la restricción $B|_{(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})\times(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})}$ está dada por

$$[B|_{(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})\times(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{m_i} \\ -\mathrm{Id}_{m_i} & 0 \end{bmatrix},$$

donde $m_i = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_i}$.

Demostración. Como $X \in \mathfrak{sp}(V,B)$ por el Lema 3.1.1 se cumple que $(\lambda_i+\lambda_j)B(e^i_k, e^j_l) = -B(e^i_{k-1}, e^j_l) - B(e^i_k, e^j_{l-1})$. Entonces,

1. Si $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, se sigue que

$$(\lambda_i+\lambda_j)B(e^i_1, e^j_1) = -B(e^i_0, e^j_1) - B(e^i_1, e^j_0) = 0,$$

de donde se sigue que $B(e^i_1, e^j_1) = 0$.

Observemos también que, aplicando nuevamente el Lema 3.1.1 a $B(e^i_1, e^j_l)$ para $l \geq 2$, obtenemos

$$(\lambda_i+\lambda_j)B(e^i_1, e^j_l) \;=\; -B(e^i_1, e^j_{l-1}),$$

y entonces $B(e^i_1, e^j_l) = -\frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)}B(e^i_1, e^j_{l-1})$, de donde

$$\begin{array}{rcl} B(e^i_1, e^j_2) &=& -\frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)}B(e^i_1, e^j_1) &=& 0, \\ B(e^i_1, e^j_3) &=& -\frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)}B(e^i_1, e^j_2) &=& 0, \\ & \vdots & \\ B(e^i_1, e^j_{m_j}) &=& -\frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)}B(e^i_1, e^j_{m_j-1}) &=& 0, \end{array}$$

por lo tanto $B(e^j_1, e^i_l) = 0$ para todo $1 \leq l \leq m_j$.

De manera análoga, como $(\lambda_i+\lambda_j)B(e^i_2, e^j_1) = 0$, tenemos que $B(e^j_2, e^i_l) = 0$ para todo $1 \leq l \leq m_j$.

Siguiendo el mismo procedimiento, podemos concluir que $B(e^j_k, e^i_l) = 0$ para todo $1 \leq l \leq m_i$ y $1 \leq k \leq m_j$. Por lo tanto, $B|_{V_{\lambda_i}\times V_{\lambda_j}} \equiv 0$.

2. Supongamos ahora que $\lambda_i + \lambda_j = 0$. De modo que las bases para V_{λ_i} y V_{λ_j} tienen la misma cardinalidad, digamos m_i.

   Además, del Lema 3.1.1 se sigue que

$$B(e_k^i, e_{l-1}^j) = -B(e_{k-1}^i, e_l^j) \text{ para todo } 1 \leq k, l \leq m_i.$$

   Luego $B(e_1^i, e_p^j) = -B(e_0^i, e_{p+1}^j) = 0$ para todo $1 \leq p \leq m_i - 1$ y $B(e_1^i, e_{m_i}^j) \neq 0$ ya que, por hipótesis B no degenera.

   De manera análoga, como $B(e_2^i, e_{p-1}^j) = -B(e_1^i, e_p^j) = 0$, entonces $B(e_2^i, e_{p-1}^j) = 0$ para todo $1 \leq p - 1 \leq m_i - 2$ y $B(e_2^i, e_{m_i}^j) \neq 0$.

   Siguiendo el mismo procedimiento, podemos concluir que $B(e_k^j, e_l^i) = 0$ cuando $k + l \leq m_i$.

   Mientras que, como $B(e_k^i, e_{l-1}^j) = -B(e_{k-1}^i, e_l^j)$ entonces

$$B(e_p^i, e_1^j) = -B(e_{p-1}^i, e_2^j) = B(e_{p-2}^i, e_3^j),$$

   en general, $B(e_{m_i}^i, e_1^j) = (-1)^p B(e_{m_i-p}^i, e_{p+1}^j)$ para todo $1 \leq p \leq m_i - 1$.

   Se sigue también que $B(e_{p-1}^i, e_2^j) = B(e_p^i, e_1^j) \neq 0$, y en general

$$B(e_{m_i-1}^i, e_2^j) = (-1)^p B(e_{m_i-p}^i, e_{p+2}^j),$$

   para todo $1 \leq p \leq m_i - 1$.

   Y siguiendo el mismo procedimiento, concluimos que

$$\begin{aligned} B(e_k^i, e_l^j) &= (-1)^{m_i-k} B(e_{m_i}^i, e_{l+k-m_i}^j) \\ &= (-1)^{m_i-l} B(e_{k-m_i+l}^j, e_{m_i}^i) \\ &= (-1)^{m_i-l} B(e_{k-(m_i-l)}^j, e_{m_i}^i) \text{ cuando } k + l > m_i. \end{aligned}$$

Haciendo $B_{kl} = (-1)^{m_i-l}B(e^j_{k-(m_i-l)}, e^i_{m_i})$ cuando $k+l > m_i$, se sigue que la matriz asociada a $B|_{V_{\lambda_i}\times V_{\lambda_j}}$ está dada por

$$[B_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B_{1,m_i} \\ 0 & 0 & \dots & -B_{1,m_i} & B_{2,m_i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^{m_i-1}B_{1,m_i} & (-1)^{m_i-2}B_{2,m_i} & \dots & -B_{m_i-1,m_i} & B_{m_i,m_i} \end{bmatrix},$$

la cual claramente es una matriz invertible.

Es decir, al considerar las bases $\{e^i_1, ..., e^i_{m_i}\}$ y $\{e^j_1, ..., e^j_{m_j}\}$ de V_{λ_i} y V_{λ_j} respectivamente, la restricción $B\mid_{(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})}$ es bilineal y no degenerada definida por

$$B(e^i_k, e^j_l) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k+l \leq m_i \\ (-1)^{m_i-l}B(e^j_{k-(m_i-l)}, e^i_{m_i}) & \text{si} \quad k+l > m_i \end{cases}$$

Mientras que la matriz inversa de $[B_{kl}]$ denotada por $[A_{sr}]$ está dada por:

$$A_{sr} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r+s > m_i+1 \\ (-1)^{s-1}A_{1,r+s-1} & \text{si} \quad r+s \leq m_i+1 \end{cases}$$

Luego,

$$[A_{sr}] \quad = \quad \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & \dots & (-1)^{m_i-2}A_{1,m_i-1} & (-1)^{m_i-1}A_{1,m_i} \\ A_{12} & -A_{13} & \dots & (-1)^{m_i-2}A_{1,m_i} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1,m_i} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veamos que existe una base de V_{λ_i}, digamos $\{f^i_1, ..., f^i_{m_i}\}$ tal que

$$B(f^i_k, e^j_l) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq l \\ 1 & \text{si} \quad k = l \end{cases}$$

Observemos que, tomando $f^i_k = \sum_{s=1}^{m_i} A_{sk}e^i_s$ para todo $1 \leq k \leq m_i$, $B(f^i_k, e^j_l) = \delta^l_k$.

Por lo tanto, la matriz asociada a $B|_{(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})\times(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})}$ está dada por

$$[B|_{(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})\times(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{m_i} \\ -\mathrm{Id}_{m_i} & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Observación 3.1.1. Ya que el segundo inciso de la Proposición 3.1.1 implica que existen bases de V_{λ_i} y V_{λ_j} tales que

$$[B|_{(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})\times(V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j})}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{m_i} \\ -\mathrm{Id}_{m_i} & 0 \end{bmatrix},$$

podemos identificar al subespacio cíclico V_{λ_j} con el espacio dual $V^*_{\lambda_i}$. En este caso, decimos que el subespacio V_{λ_j} es *par dual* de V_{λ_i}.

Corolario 3.1.2. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$ como en la Proposición 3.1.1 (2). Entonces, la matriz asociada a $X|_{V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j}} : V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_j} \to V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_j}$ está dada por

$$[X|_{V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j}}] = \left[\begin{array}{c|c} -\lambda_j \mathrm{Id}_{m_i} - N^t_{m_i} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_j \mathrm{Id}_{m_i} + N_{m_i} \end{array}\right].$$

Demostración. Recordemos que $f^i_k = \sum_{s=1}^{m_i} A_{sk} e^i_s = \sum_{s=1}^{m_i-k+1} (-1)^{s-1} A_{1,k+s-1} e^i_s$, para $1 \leq k < m_i$ tenemos que

$$\begin{aligned} X(f^i_k) &= \sum_{s=1}^{m_i-k+1} (-1)^{s-1} A_{1,k+s-1} \left(\lambda_i e^i_s + e^i_{s-1}\right) \\ &= -\lambda_j f^i_k + \sum_{s=1}^{m_i-k+1} (-1)^{s-1} A_{1,k+s-1} e^i_{s-1} \\ &= -\lambda_j f^i_k - \Big(\sum_{s=1}^{m_i-k} (-1)^{s-1} A_{1,k+s} e^i_s\Big), \\ &= -\lambda_j f^i_k - f^i_{k+1}, \end{aligned}$$

mientras que para $k = m_i$, se sigue que

$$\begin{aligned} X(f^i_{m_i}) &= X(A_{1,m_i} e^i_1) \\ &= \lambda_i A_{1,m_i} e^i_1 \\ &= -\lambda_j f^i_{m_i}. \end{aligned}$$

Entonces, la matriz asociada a $X|_{V_{\lambda_i}} : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ está dada por

$$\begin{aligned} [X|_{V_{\lambda_i}}] &= \begin{bmatrix} -\lambda_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -\lambda_j \end{bmatrix} \\ &= [-\lambda_j I_{m_i} - N^t_{m_i}], \end{aligned}$$

donde $N^t_{m_i}$ es la matriz transpuesta de N_{m_i}. □

Observación 3.1.3. Sin pérdida de generalidad, consideremos al espacio vectorial simpléctico estándar $(\mathbb{R}^{2n}, B)$. Recordemos que, una matriz Hamiltoniana $X \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ satisface $X^t J + BJ = 0$, y por lo tanto

$$[X] = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & -A^t \end{array}\right], \tag{3.1}$$

donde $A, C, D \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ con C y D simétricas.

Observemos que la forma canónica de Jordan de $X \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ no es necesariamente una matriz Hamiltoniana. Sin embargo, si $X \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ tiene valores propios $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(X)$ que satisfacen las condiciones dadas en la Proposición 3.1.1 (2), entonces $V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_j} \subset V$ es un subespacio vectorial simpléctico y, como consecuencia, $X|_{V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_j}}$ es una transformación Hamiltoniana.

Por lo tanto, del Corolario 3.1.2 concluimos que la forma canónica de $X|_{V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j}}$: $V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_j} \to V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_j}$ es una matriz Hamiltoniana:

$$[X|_{V_{\lambda_i}\oplus V_{\lambda_j}}] = \left[\begin{array}{c|c} -\lambda_j \mathrm{Id}_{m_i} - N_{m_i}^t & 0 \\ \hline 0 & \lambda_j \mathrm{Id}_{m_i} + N_{m_i} \end{array}\right]. \tag{3.2}$$

De la Proposición 3.1.1 tenemos también los siguientes resultados:

Corolario 3.1.4. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$. Si $\mu \neq 0$ y 0 son valores propios de X, entonces la restricción $B|_{V_0\times V_\mu} : V_0 \times V_\mu \to \mathbb{R}$ es idénticamente cero.

Observación 3.1.5. Para el siguiente Lema, pensaremos en V_0 como subespacio generalizado asociado al valor propio $\lambda_0 = 0$ y no como subespacio cíclico. Es decir, consideraremos al kernel del endomorfismo $(X - \lambda_0 \mathrm{Id}\,|_{V_{\lambda_0}})^q$.

Lema 3.1.2. Si $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$ entonces $B|_{V_0\times V_0} : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ no degenera. Más aún, la Proposición 3.1.1 (2) implica que existe una base V_0 tal que

$$[B|_{V_0\times V_0}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{m_i} \\ -\mathrm{Id}_{m_i} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, V_0 puede ser descompuesto como sigue:

$$V_0 = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus (U_{s_1} \oplus U_{s_1}^*) \oplus \cdots \oplus (U_{s_k} \oplus U_{s_k}^*),$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$, U_i es un subespacio vectorial simpléctico de V; mientras que para cada $1 \leq j \leq k$, $U_{s_j}^*$ es el par dual del subespacio U_{s_j}. Entonces, se sigue que $(U_{s_j} \oplus U_{s_j}^*)$ es también un subespacio vectorial simpléctico de V.

Corolario 3.1.6. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$. Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de X, entonces la restricción $B|_{V_\lambda\times V_\lambda} : V_\lambda \times V_\lambda \to \mathbb{R}$ es idénticamente cero.

Corolario 3.1.7. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$. Si $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \in \sigma(X)$, entonces $-\lambda \in \sigma(X)$.

Demostración. Sea $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \in \sigma(X)$ y supongamos que $-\lambda \notin \sigma(X)$; es decir, para toda $\mu \in \sigma(X)$, $\mu \neq -\lambda$. De manera que

$$V = V_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu \in \sigma(X),\, \mu \neq -\lambda} V_\mu.$$

Observemos que $\lambda + \lambda \neq 0$ y $\lambda + \mu \neq 0$ para toda $\mu \in \sigma(X)$, $\mu \neq -\lambda$. Entonces, por la Proposición 3.1.1(1), $B \mid_{V_\lambda \times V_\lambda} \equiv 0$ y $B \mid_{V_\lambda \times V_\mu} \equiv 0$ para toda $\mu \in \sigma(X)$, $\mu \neq -\lambda$. Por lo tanto B degenera, lo cual es una contradicción. De manera que $-\lambda \in \sigma(X)$. $\square$

Corolario 3.1.8. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$. Si $\lambda = a + bi$ es un valor propio complejo de X con $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces $-\lambda, \overline{\lambda}$ y $-\overline{\lambda}$ también son valores propios de X.

Demostración. La prueba es similar a la demostración anterior. $\square$

Ahora, podemos enunciar el Teorema principal de esta sección:

Teorema 3.1.9. Sea $B : V \times V \to \mathbb{R}$ una geometría simpléctica en V y consideremos al álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(V, B)$. Entonces, cualquier transformación Hamiltoniana $X \in \mathfrak{sp}(V, B)$ induce una descomposición de V como una suma ortogonal del subespacio generalizado V_0 asociado a $\lambda = 0$, y pares duales asociados a los valores propios no cero $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_t$ de $\sigma(X)$:

$$V = V_0 \oplus (V_{\lambda_1} \oplus V_{-\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (V_{\lambda_t} \oplus V_{-\lambda_t}).$$

Más aún, V_0 también admite una descomposición similar, esto es,

$$V_0 = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus (U_{s_1} \oplus U_{s_1}^*) \oplus \cdots \oplus (U_{s_k} \oplus U_{s_k}^*),$$

donde cada uno de los subespacios U_i $(1 \leq i \leq r), U_{s_j} \oplus U_{s_j}^*$ $(1 \leq j \leq k)$ y $V_{\lambda_r} \oplus V_{-\lambda_r}$ $(1 \leq r \leq t)$ están dotados con la geometría simpléctica de V.

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 3.1.1. $\square$

Observación 3.1.10. Sea $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de dimensión finita de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $B : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal en V. Decimos que B es *ρ-invariante* si

$$B(\rho(x)u, v) = B(u, \rho(x)v) \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ \forall u, v \in V.$$

Supongamos que (V, B) es un espacio vectorial dotado con una geometría simpléctica $B : V \times V \to \mathbb{R}$, y sea $\rho : \mathfrak{g}(V, B) \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}(V, B)$ de dimensión finita completamente reducible. Si B es ρ-invariante, entonces V puede ser descompuesto como sigue:

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus (W_1 \oplus W_1^*) \oplus \cdots \oplus (W_l \oplus W_l^*),$$

donde cada uno de los subespacios U_i $(1 \leq i \leq k)$ y $W_j \oplus W_j^* (1 \leq j \leq l)$ están dotados con la geometría simpléctica de V (ver [14]).

3.2. Formas canónicas reales de $X \in \mathfrak{sp}(V)$

Sea V un espacio vectorial real dotado con una geometría simpléctica $B : V \times V \to \mathbb{R}$, y consideremos su correspondiente álgebra de Lie, $\mathfrak{sp}(V, B)$. Usando los resultados obtenidos en §3.1, en esta sección determinaremos la forma canónica real de una transformación Hamiltoniana $X \in \mathfrak{sp}(V)$ bajo acción por conjugación de $\mathrm{Sp}\,(V)$.

Del Teorema 3.1.9 sabemos que $X \in \mathfrak{sp}(V)$ induce una descomposición de V como una suma ortogonal de subespacios cíclicos asociados a $\sigma(X)$; por tanto, calcularemos primero las formas canónicas reales de las restricciones $X|_{V_\lambda} : V_\lambda \to V_\lambda$ para cualquier $\lambda \in \sigma(X)$ y después, determinaremos cómo estas formas canónicas reales interactúan mutuamente.

Para comenzar, recordemos que los valores propios complejos de una transformación Hamiltoniana X aparecen en cuádruplas $\lambda, -\lambda, \overline{\lambda}, -\overline{\lambda}$ donde $\lambda = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, o en parejas reales $\lambda, -\lambda$, en cada caso con multiplicidad algebraica. Primero supongamos que $X \in \mathfrak{sp}(V)$ tiene una pareja de valores propios reales no cero $\lambda, -\lambda$ que satisfacen las condiciones de la Proposición 3.1.1 (2). Entonces $V_\lambda \oplus V_{-\lambda}$ es un espacio vectorial simpléctico y como consecuencia, $X|_{V_\lambda \oplus V_{-\lambda}} \in \mathfrak{sp}(V_\lambda \oplus V_{-\lambda})$. Si $X|_{V_\lambda \oplus V_{-\lambda}}$ es diagonalizable, ya acabamos. En otro caso, del Corolario 3.1.2 se sigue que la matriz asociada a $X|_{V_\lambda \oplus V_{-\lambda}} : V_\lambda \oplus V_{-\lambda} \to V_\lambda \oplus V_{-\lambda}$ es una matriz Hamiltoniana:

$$[X|_{V_\lambda \oplus V_{-\lambda}}] = \left[\begin{array}{c|c} -\lambda \mathrm{Id}_m - N_m^t & 0 \\ \hline 0 & \lambda \mathrm{Id}_m + N_m \end{array}\right].$$

Supongamos ahora que $\lambda, -\lambda, \overline{\lambda}, -\overline{\lambda}$ son valores propios complejos no cero de $X \in \mathfrak{sp}(V)$, donde $\lambda = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces la forma canónica real de $X|_{V_\lambda \oplus V_{-\lambda}}$ no es necesariamente una matriz Hamiltoniana, pero podemos determinar una base real del espacio vectorial simpléctico $W = (V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}) \oplus (V_{-\lambda} \oplus V_{-\bar{\lambda}})$ para la cual la restricción $X|_W \in \mathfrak{sp}(V)$ sea representada por una matriz Hamiltoniana.

Lema 3.2.1. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V)$ con valor propio complejo no cero $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Supongamos que V_λ es un subespacio cíclico complejo de dimensión m de V. Entonces, existe una base del subespacio vectorial simpléctico $W = (V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}) \oplus (V_{-\lambda} \oplus V_{-\bar{\lambda}})$ tal que la forma canónica real de la restricción $X|_W : W \to W$ está dada por

$$[X|_W] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} A & \mathrm{Id}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \mathrm{Id}_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{Id}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} -A^t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mathrm{Id}_2 & -A^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_2 & -A^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\mathrm{Id}_2 & -A^t \end{matrix} \end{array}\right],$$

donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V)$ con $\lambda, -\lambda, \overline{\lambda}, -\overline{\lambda}$ valores propios complejos no cero, donde $\lambda = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Ya que $\lambda \in \mathbb{C}$, hacemos uso del campo $\mathbb{C}$ a través de la *complejificación* del espacio vectorial simpléctico real V, cuyos elementos ahora son pares de vectores de V, digamos $v_1 + iv_2$ y donde la suma de vectores y la multiplicación por escalares (complejos) es la natural. Y donde la dimensión del espacio vectorial complejificado es la misma que la dimensión de V.

Ahora, si $V_{-\lambda}$ es un subespacio complejo de V de dimensión m, entonces $V_{\bar{\lambda}}, V_{-\lambda}$ y $V_{-\bar{\lambda}}$ son también subespacios complejos de V de dimensión m. Luego, existe una base $\{e_1 \ldots e_{2m}\}$ de $V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}$ tal que

$$\begin{aligned} X(e_1) &= ae_1 - be_2, \\ X(e_2) &= be_1 + ae_2, \\ X(e_i) &= e_{i-2} + ae_i - be_{i+1} \quad \text{para } i \text{ impar tal que } 3 \leq i \leq 2m-1, \\ X(e_i) &= e_{i-2} + be_{i-1} + ae_i \quad \text{para } i \text{ par tal que } 4 \leq i \leq 2m, \end{aligned}$$

de manera que la forma canónica de la restricción $X|_{V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}} : V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}} \to V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}$ está dada por

$$[X|_{V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}}] = \begin{bmatrix} A & \mathrm{Id}_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A & \mathrm{Id}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Id}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix},$$

donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Y existe una base $\{f_1 \dots f_{2m}\}$ de $V_{-\lambda} \oplus V_{-\bar{\lambda}}$, tal que

$$\begin{array}{rcll} X(f_1) &=& -af_1 + bf_2, & \\ X(f_2) &=& -bf_1 - af_2, & \\ X(f_i) &=& f_{i-2} - af_i + bf_{i+1} & \text{para } i \text{ impar tal que } 3 \leq i \leq 2m-1, \\ X(f_i) &=& f_{i-2} - bf_{i-1} - af_i & \text{para } i \text{ par tal que } 4 \leq i \leq 2m, \end{array}$$

de manera que la forma canónica de la restricción $X|_{V_{-\lambda}\oplus V_{-\bar{\lambda}}} : V_{-\lambda} \oplus V_{-\bar{\lambda}} \to V_{-\lambda} \oplus V_{-\bar{\lambda}}$ está dada por

$$[X|_{V_{-\lambda}\oplus V_{-\bar{\lambda}}}] = \begin{bmatrix} -A & \mathrm{Id}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -A & \mathrm{Id}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Id}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Entonces, para obtener la matriz Hamiltoniana requerida, será suficiente elegir una base adecuada de $V_{-\lambda} \oplus V_{-\bar{\lambda}}$.

Para ello, definamos $\widetilde{f_k} = (-1)^{[2+\frac{k-1}{2}]} f_{2r-(k-1)}$ para $1 \leq k \leq 2m$, y entonces

$$\begin{array}{rcl} X(\widetilde{f_1}) &=& -a\widetilde{f_1} - b\widetilde{f_2} - \widetilde{f_3} \\ X(\widetilde{f_2}) &=& b\widetilde{f_1} - a\widetilde{f_2} - \widetilde{f_4}, \\ X(\widetilde{f_i}) &=& -a\widetilde{f_i} - b\widetilde{f_{i+1}} - \widetilde{f_{i+2}}, \text{ para } i \text{ impar tal que } 3 \leq i < 2m-1, \\ X(\widetilde{f_i}) &=& b\widetilde{f_{i-1}} - a\widetilde{f_i} - \widetilde{f_{i+2}}, \text{ para } i \text{ par tal que } 4 \leq i < 2m, \\ X(\widetilde{f_{2r-1}}) &=& -a\widetilde{f_{2r-1}} - b\widetilde{f_{2r}}, \\ X(\widetilde{f_{2r}}) &=& b\widetilde{f_{2r-1}} - a\widetilde{f_{2r}}. \end{array}$$

Además,

$$\begin{array}{lcl} X(\widetilde{f_1}) &=& X((-1)^2 f_{2m}) = X(f_{2m}), \\ X(\widetilde{f_2}) &=& X((-1)^{[5/2]} f_{2m-1}), \\ \vdots && \\ X(\widetilde{f_{2r-1}}) &=& X((-1)^{[m+1]} f_2), \\ X(\widetilde{f_{2r}}) &=& X((-1)^{[m+(3/2)]} f_1). \end{array}$$

Por lo tanto $\{f_{2m}, (-1)^2 f_{2m-1}, \ldots, (-1)^{m+1} f_2, (-1)^{m+1} f_1\}$ es una base de $V_{-\lambda} \oplus V_{-\bar{\lambda}}$ para la cual la forma canónica de la restricción $X|_{V_{-\lambda}\oplus V_{-\bar{\lambda}}}$ está dada por:

$$[X|_{V_{-\lambda}\oplus V_{-\bar{\lambda}}}] = \begin{bmatrix} -A^t & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\mathrm{Id}_2 & -A^t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_2 & -A^t & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A^t \end{bmatrix}.$$

□

Ahora, si $X \in \mathfrak{sp}(V)$ y $\lambda = 0$ es valor propio de X, se sigue que:

Corolario 3.2.1. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V)$ y supongamos que $0 \in \sigma(X)$. Entonces la multiplicidad algebraica de 0 es par.

Observación 3.2.2. Si la transformación Hamiltoniana $X \in \mathfrak{sp}(V)$ es tal que $0 \in \sigma(X)$, recordemos que el Teorema 3.1.9 implica que el correspondiente subespacio generalizado V_0 puede ser descompuesto como sigue:

$$V_0 = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus (U_{s_1} \oplus U_{s_1}^*) \oplus \cdots \oplus (U_{s_k} \oplus U_{s_k}^*),$$

donde cada U_i tal que $1 \leq i \leq r$ es un subespacio vectorial simpléctico dotado con la geometría simpléctica de V; mientras que para cada $1 \leq j \leq k$, $U_{s_j}^*$ denota el par dual del subespacio U_{s_j} y más aún, $U_{s_j} \oplus U_{s_j}^*$ también es un subespacio vectorial simpléctico. Ya que U_i y $U_{s_j} \oplus U_{s_j}^*$ son subespacios simplécticos de V, podemos aplicar las ideas descritas antes para determinar la forma canónica de la restricción $X|_{V_0} : V_0 \to V_0$.

Ya que del Lema 3.1.2 tenemos que $B\mid_{V_0\times V_0}$ no degenera. Entonces, por el Corolario 3.1.2, la forma canónica de $X\mid_{V_0}: V_0 \to V_0$ está dada por

$$[X|_{V_0}] = \left[\begin{array}{c|c} -N_{m_i}^t & 0 \\ \hline 0 & N_{m_i} \end{array}\right].$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda, \mu \in \sigma(X)$ son dos valores propios no necesariamente distintos de $X \in \mathfrak{sp}(V)$. El siguiente Lema nos indica cómo obtener la forma canónica de la restricción $X|_{(V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})} : (V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu}) \to (V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})$, de tal manera que la matriz asociada $[X|_{(V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})}]$ sea una matriz Hamiltoniana.

Lema 3.2.2. Sea $X \in \mathfrak{sp}(V)$ una transformación Hamiltoniana y consideremos la descomposición de V inducida por X, como una suma directa de subespacios simplécticos (ver Teorema 3.1.9). Si $V_\lambda \oplus V_{-\lambda}$ y $V_\mu \oplus V_{-\mu}$ son dos subespacios simplécticos en esta descomposición, entonces la forma canónica de la restricción $X|_{(V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})} : (V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu}) \to (V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})$ está dada por

$$[X\,|_{(V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})}] = \left[\begin{array}{cc|cc} -\lambda \mathrm{Id}_{\,m} - N_m^t & 0 & & \\ 0 & -\mu \mathrm{Id}_{\,n} - N_n^t & & \\ \hline & & \lambda \mathrm{Id}_{\,m} + N_m & 0 \\ & & 0 & \mu \mathrm{Id}_{\,n} + N_n \end{array}\right].$$

Demostración. Sean $V_\lambda \oplus V_{-\lambda}$ y $V_\mu \oplus V_{-\mu}$ dos subespacios simplécticos en la descomposición de V inducida por X. Entonces del Corolario 3.1.2, existen bases $\{e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r\}$ y $\{g_1, \ldots g_s, h_1, \ldots, h_s\}$ de $V_\lambda \oplus V_{-\lambda}$ y $V_\mu \oplus V_{-\mu}$ respectivamente, tales que $\{e_i, g_j, f_i, h_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ es una base del subespacio vectorial simpléctico $(V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})$. Y entonces, la forma canónica de la restricción $X|_{(V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})} : (V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu}) \to (V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \oplus (V_\mu \oplus V_{-\mu})$ es la deseada. $\square$

En resumen, lo que hicimos fue calcular la forma canónica real de una transformación Hamiltoniana $X \in \mathfrak{sp}(V)$ bajo la acción por conjugación de $\mathrm{Sp}\,(V)$ como sigue:

- Primero calculamos $\sigma(X)$ y consideramos los subespacios cíclicos indescomponibles $V_{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, r$, asociados a $\sigma(X)$. Si $0 \in \sigma(X)$ consideramos también al subespacio generalizado V_0.

- Por el Teorema 3.1.9, descomponemos al espacio vectorial V como una suma directa ortogonal de subespacios simplécticos, $V = (V_{\lambda_1} \oplus V_{-\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (V_{\lambda_t} \oplus V_{-\lambda_t})$. Si $0 \in \sigma(X)$ consideramos también la descomposición de V_0 según el Lema 3.1.2 y reordenamos de manera creciente esta descomposición en términos de la dimensión de cada subespacio vectorial simpléctico.

- Si V_0 es parte de la descomposición de V, utilizamos el Corolario 3.1.2 para calcular la forma canónica de $X|_{V_0} : V_0 \to V_0$.

- Ahora, para cada par de valores propios reales $\lambda_\ell, -\lambda_\ell$, el Corolario 3.1.2 nos indica cómo calcular la forma canónica de la restricción $X|_{V_{\lambda_\ell} \oplus V_{-\lambda_\ell}}$ bajo la acción por conjugación de $\mathrm{Sp}\,(V)$.

- Mientras que para los valores propios complejos $\lambda_j, \overline{\lambda}_j, -\lambda_j, -\overline{\lambda}_j$, del Lema 3.2.1 podemos obtener la forma canónica real de la restricción $X|_W$ bajo la acción por conjugación de $\mathrm{Sp}\,(V)$, donde $W = V_{\lambda_j} \oplus V_{\bar{\lambda}_j} \oplus V_{-\lambda_j} \oplus V_{-\bar{\lambda}_j}$.

- El siguiente paso es aplicar el Lema 3.2.2 a $V_{\lambda_1} \oplus V_{-\lambda_1}$ y $V_{\lambda_2} \oplus V_{-\lambda_2}$ para obtener la forma canónica real de la restricción $X|_{(V_{\lambda_1} \oplus V_{-\lambda_1}) \oplus (V_{\lambda_2} \oplus V_{-\lambda_2})}$ bajo la acción por conjugación de $\mathrm{Sp}\,(V)$.

- Finalmente, para obtener la forma canónica de una transformación Hamiltoniana $X \in \mathfrak{sp}(V)$, debemos continuar con este proceso un número finito de veces hasta $V_{\lambda_r} \oplus V_{-\lambda_r}$.

Observemos que en este contexto, podemos aplicar las ideas presentadas anteriormente para tratar el caso de los valores propios imaginarios puros.

Capítulo 4

Acción por congruencia de Sp $(2n, \mathbb{R})$ sobre $\mathrm{Sym}(2n, \mathbb{R})$

Dado que la aplicación de las formas canónicas para matrices Hamiltonianas que se pretende tiene lugar en la teoría de las superálgebras de Lie, empezaremos con algunas definiciones y resultados conocidos que nos interesan de dicha teoría.

4.1. Superálgebras de Lie

Definición 4.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Decimos que V es un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2-$graduado o un *superespacio vectorial* si admite una descomposición en suma directa $V = V_0 \oplus V_1$ y una forma *de paridad* $|\cdot| : (V_0 - \{0\}) \cup (V_1 - \{0\}) \to \mathbb{Z}_2$ tal que $|v| = i$ si y sólo si $v \in V_i - \{0\}$, $i = 1, 2$.

Observación 4.1.1. Sea $v = v_0 + v_1$ tal que $v \in V, v_0 \in V_0$ y $v_1 \in V_1$. Decimos entonces que v_0 y v_1 son las *componentes homogéneas* de V.

Definición 4.1.2. Una *superálgebra de Lie* es un superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, y una forma bilineal $[\![\cdot, \cdot]\!] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisface

a) $[\![\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b]\!] \subset \mathfrak{g}_{a+b \mod 2}$,

b) $[\![x, y]\!] = -(-1)^{|x||y|}[\![y, x]\!]$,

c) $(-1)^{|z||x|}[\![x, [\![y, z]\!]]\!] + (-1)^{|x||y|}[\![y, [\![z, x]\!]]\!] + (-1)^{|y||z|}[\![z, [\![x, y]\!]]\!] = 0$,

para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$ homogéneos.

Observemos que $x, y, z \in \mathfrak{g}_0$ si y sólo si $|x| = |y| = |z| = 0$. Luego $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie con el corchete definido por $[\ ,\ ]_0 = [\![\cdot, \cdot]\!]\ |_{\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0}\colon \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$.

Ejemplo. Sea $V = V_0 \oplus V_1$ y consideremos al espacio de endomorfismos de V, $\mathrm{End}\,(V_0|V_1)$ tal que $[\![T, S]\!] = T \circ S - (-1)^{|S||T|} S \circ T$. Entonces $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$ es una superálgebra de Lie.

Definición 4.1.3. Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ superálgebras de Lie. Un *morfismo* de superálgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es una transformación lineal tal que $\varphi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i$ $(i = 0, 1)$ y

$$\varphi([\![x, y]\!]) = [\![\varphi(x), \varphi(y)]\!].$$

Si φ es un morfismo biyectivo, decimos que φ es un *isomorfismo* de superálgebras de Lie. En dicho caso $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son superálgebras de Lie *isomorfas*.

Proposición 4.1.1. Sea $\rho : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ tal que $\rho(x)(u) := [\![x, u]\!]$ donde $x \in \mathfrak{g}_0, u \in \mathfrak{g}_1$, entonces ρ es una representación.

Demostración. Sean $x, y \in \mathfrak{g}_0, u \in \mathfrak{g}_1$. Por definición, $\rho([x, y]_0)(u) = [\![[\![x, y]\!], u]\!]$, mientras que $[\rho(x), \rho(y)] = [\![x, [\![y, u]\!]]\!] - [\![y, [\![x, u]\!]]\!]$. □

Sea $\Gamma := [\![\cdot, \cdot]\!]\ |_{\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1}\colon \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$. Entonces Γ es una forma bilineal, simétrica y *equivariante*, es decir; $[\![x, [\![u, v]\!]]\!] = [\![[\![x, u]\!], v]\!] + [\![u, [\![x, v]\!]]\!]$. Además si $u, v, w \in \mathfrak{g}_1$, entonces $\rho(\Gamma(u, v))w + \rho(\Gamma(v, w))u + \rho(\Gamma(w, u))v = 0$.

El siguiente resultado es bien conocido y la demostración puede ser vista en [13] y [17].

Proposición 4.1.2. En general, una estructura de superálgebra de Lie en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es una tripleta $([\cdot,\cdot], \rho, \Gamma)$ que consiste en:

(1) Una estructura de álgebra de Lie $[\cdot,\cdot]$ en $\mathfrak{g}_0$.

(2) Una representación $\rho : \mathfrak{g}_0 \to \mathrm{End}\,(\mathfrak{g}_1)$.

(3) Una forma bilineal, simétrica $\Gamma : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ que satisface las siguientes *súper* identidades de Jacobi:

(J1) $[x, \Gamma(u,v)] = \Gamma(\rho(x)u, v) + \Gamma(u, \rho(x)v), x \in \mathfrak{g}_0, u, v \in \mathfrak{g}_1$, y

(J2) $\rho(\Gamma(u,v))w + \rho(\Gamma(v,w))u + \rho(\Gamma(w,u))v = 0, u, v, w \in \mathfrak{g}_1$.

Lema 4.1.1. Si $\rho = \mathrm{ad}$ y Γ bilineal, simétrica y equivariante, entonces $(J1)$ implica $(J2)$.

Demostración. $[x, \Gamma(u,v)] = \Gamma(\rho(x)u, v) + \Gamma(u, \rho(x)v)$. □

Si $\rho = \mathrm{ad}$ y Γ bilineal, simétrica y equivariante, estas superálgebras de Lie serán llamadas superálgebras de Lie *basadas* en $\mathfrak{g}_0$, y escribiremos $\mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}}\,(\mathfrak{g}_0)$ para el conjunto de formas bilineales, simétricas y equivariantes $\Gamma : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_1$ sobre un $\mathbb{F}$-espacio vectorial que satisface (J1) para $\rho = \mathrm{ad}_{\,\mathfrak{g}_0}$, es decir, $\mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}}\,(\mathfrak{g}_0) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(S^2(\mathfrak{g}_0), \mathfrak{g}_0)$.

Proposición 4.1.3. Las superálgebras de Lie definidas en $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ por las tripletas $([\cdot,\cdot], \rho, \Gamma)$ y $([\cdot,\cdot]', \rho', \Gamma')$ son isomorfas si y sólo si existe un par $(T, S) \in \mathrm{GL}\,(\mathfrak{g}_0) \times \mathrm{GL}\,(\mathfrak{g}_1)$ tal que,

$$[\cdot,\cdot]' = T([T^{-1}(\cdot), T^{-1}(\cdot)]),$$
$$\rho' = S\rho(T^{-1}(\cdot)) \circ S^{-1},$$
$$\Gamma' = T(\Gamma(S^{-1}(\cdot), S^{-1}(\cdot))).$$

Cuando la estructura de álgebra de Lie $[\cdot,\cdot]$ de $\mathfrak{g}_0$ está fija, y $\rho = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}$, tenemos la acción del grupo

$$G = \{(T,S) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_0) \times \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_1) \mid S \circ T^{-1} \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(\cdot) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(\cdot) \circ S \circ T^{-1}\}.$$

Por lo que para clasificar las diferentes superálgebras de Lie basadas en $\mathfrak{g}_0$, debemos hallar las órbitas en $\mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}}(\mathfrak{g}_0)$ bajo la acción *izquierda* del grupo $(T,S) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_0) \times \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_1)$, tal que $[T(x), S(y)] = S([x,y])$, dado por,

$$\Gamma \mapsto (T,S) \cdot \Gamma = T(\Gamma(S^{-1}(\cdot), S^{-1}(\cdot))).$$

El grupo de automorfismos de la superálgebra de Lie determinada por una Γ dada es el subgrupo *de isotropía* en Γ de esta acción.

4.2. Formas canónicas de $\mathfrak{h}_{2n+1}$

Nuestro propósito es la clasificación de todas las superálgebras de Lie $(\mathfrak{g}, \rho, \Gamma)$ cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_{2n+1}$ es el álgebra de Lie Heisenberg y ρ está determinada por la representación adjunta.

Definición 4.2.1. Sea A una matriz antisimétrica de tamaño $2n$, con entradas $(A)_{ij} := A_{i,j}$ y sea $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ una base para $\mathbb{F}^{2n}$. Definamos en $\mathbb{F}^{2n+1} := \langle e_1, \ldots, e_{2n}, e_0\rangle$ la siguiente estructura de álgebra de Lie

$$\begin{aligned} [e_i, e_j] &:= A_{i,j}\, e_0 \quad 1 \le i,j \le 2n, \\ [e_0, e_i] &:= 0 \quad i = 1, \ldots, 2n. \end{aligned}$$

El *álgebra de Lie Heisenberg* $\mathfrak{h}_{2n+1}$ se obtiene de la construcción anterior eligiendo A como la matriz antisimétrica definida por $A_{2k-1,2k} := 1$ si $k = 1, \ldots, n$ y $A_{i,j} = 0$ si $i \le j$ y $(2k-1, 2k) \neq (i,j)$.

Sea $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_{2n+1}$ y $\mathfrak{g}_1 = \langle f_1, \ldots, f_{2n}, f_0 \rangle$, al considerar $\rho = \mathrm{ad}_{\,\mathfrak{g}_0}$ obtenemos:

$$[e_i, f_j] = A_{i,j}\ f_0 \quad 1 \leq i, j \leq 2n,$$

$$[e_0, f_i] = 0 \quad i = 1, \ldots, 2n,$$

$$[e_i, f_0] = 0 \quad i = 1, \ldots, 2n.$$

Escribamos ahora la forma bilineal simétrica $\Gamma : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ en términos de estas bases, esto es,

$$\Gamma(f_i, f_j) = \sum_{k=0}^{2n} \Gamma_{i,j}^k e_k.$$

Se puede verificar fácilmente que Γ satisface (J1) si y solo sí se cumplen:

$$\sum_{k=1}^{2n} \Gamma_{s,t}^k A_{r,k} = \Gamma_{0,t}^0 A_{r,s} + \Gamma_{0,s}^0 A_{r,t}, \quad \Gamma_{0,t}^k A_{r,s} + \Gamma_{0,s}^k A_{r,t} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \Gamma_{0,t}^k A_{r,k} = \Gamma_{0,0}^0 A_{r,t}, \quad \Gamma_{0,0}^k A_{r,t} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \Gamma_{0,0}^k A_{r,k} = 0.$$

Para todos, $r, s, t, k \in \{1, \ldots, 2n\}$. En el caso de $\mathfrak{h}_{2n+1}$ la A que la genera es una matriz invertible, por lo que, podemos multiplicar en la primera ecuación obtenida por $(A^{-1})_{p,r}$ y sumar sobre r para obtener:

$$\Gamma_{s,t}^p = \delta_p^s\ \Gamma_{0,t}^0 + \delta_p^t\ \Gamma_{0,s}^0.$$

Al ser A invertible la segunda ecuación implica:

$$\Gamma_{0,s}^k = 0.$$

Al sustituir en la tercer y cuarta ecuación se concluye que:

$$\Gamma_{0,0}^0 = \Gamma_{0,0}^k = 0,$$

y la última ecuación se satisface trivialmente.

Además, de acuerdo al Lema 4.1.1, Γ satisface (J2). Y entonces, por la Proposición 4.1.2 tenemos una superálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \rho, \Gamma)$ para $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_{2n+1} \oplus \mathfrak{h}_{2n+1}$, $\rho = \mathrm{ad}_{\,\mathfrak{g}_0}$ y Γ que satisface las ecuaciones anteriores.

Podemos ahora establecer que $\Gamma \in \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}_{\,\mathfrak{g}_0}}(\mathfrak{g}_0)$ se corresponde con $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2n}, \Gamma_0)$ donde:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} h_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{bmatrix} h_0 & \lambda \\ \lambda^t & 0 \end{bmatrix},$$

para $i = 1, \ldots, 2n$, $(h_p)^t = h_p$ y si $p = 1, \ldots, 2n$. Entonces $(h_p)_{s,t} = \delta_p^s\ \lambda_t + \delta_p^t\ \lambda_s$, donde $\lambda^t = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})$.

En resumen, hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_{2n+1}(\mathbb{F})$ la respectiva álgebra de Lie Heisenberg, entonces

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}_{\,\mathfrak{g}_0}}(\mathfrak{g}_0)) = n(2n+3).$$

4.2.1. Determinación de G actuando en $\mathrm{Sym}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0)$

Enunciemos ahora el siguiente resultado (ver [16]).

Proposición 4.2.2. Sea $\mathfrak{h}_{2n+1}(\mathbb{F})$ el álgebra de Lie Heisenberg sobre el campo $\mathbb{F}$ y sea $Z(\mathfrak{h}_{2n+1}(\mathbb{F}))$ el centro. Entonces $T \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_{2n+1}(\mathbb{F}))$ si y sólo si

$$T = \begin{bmatrix} B & 0 \\ \tau^t & \delta \end{bmatrix},$$

donde $\delta \neq 0$, $\tau \in \mathbb{F}^{2n}$ y $B \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{F})$ satisface $B^t J B = \delta J$.

De acuerdo con la Proposición 4.1.3, debemos determinar $S \in \mathrm{GL}\,(\mathfrak{g}_1)$ tal que

$$S \circ T^{-1} \circ \mathrm{ad}_{\,\mathfrak{g}_0}(\cdot) = \mathrm{ad}_{\,\mathfrak{g}_0}(\cdot) \circ S \circ T^{-1}. \tag{4.1}$$

Recordando que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_{2n+1}(\mathbb{F})$ es facil verificar que:

Lema 4.2.1. Sea $R \in \mathrm{Mat}\,(2n+1, \mathbb{F})$. Entonces $R \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x) \circ R$ para toda $x \in \mathfrak{g}_0$ si y solo si

$$R = \begin{bmatrix} r\mathrm{Id}_{2n} & 0 \\ \alpha^t & r \end{bmatrix},$$

donde $r \in \mathbb{F}$, $\alpha \in \mathbb{F}^{2n}$.

Corolario 4.2.1. S satisface la ecuación 4.1 si y solo si $S = R \circ T$, i.e.,

$$S = \begin{bmatrix} rB & 0 \\ \sigma^t & r\delta \end{bmatrix}, \text{ donde } \sigma^t = \alpha^t B + r\tau^t.$$

De la Proposición 4.2.2 y el Corolario 4.2.1 podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 4.2.3. Si la estructura de álgebra de Lie $[\cdot,\cdot]$ de $\mathfrak{g}_0$ está fija y $\rho = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}$, entonces el grupo $(T, S) \in \mathrm{GL}\,(\mathfrak{g}_0) \times \mathrm{GL}\,(\mathfrak{g}_1)$ está dado por

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} B & 0 \\ \tau^t & \delta \end{bmatrix}, r \begin{bmatrix} B & 0 \\ \sigma^t & \delta \end{bmatrix} \mid r \in \mathbb{F} - \{0\},\ \sigma, \tau \in \mathbb{F}^{2n}, \delta \neq 0, B \in \mathrm{GL}\,(2n, \mathbb{F}),\ B^t J B = \delta J \right\}.$$

Ahora podemos identificar $\mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}}(\mathfrak{g}_0)$ con producto $2n+1$ veces del espacio de matrices simétricas de $(2n+1) \times (2n+1)$ mediante

$$\Gamma \longleftrightarrow (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2n}, \Gamma_0),$$

y por tanto la acción izquierda $G \times \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}}(\mathfrak{g}_0) \to \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}}(\mathfrak{g}_0)$ esta dada por

$$(T, S) \cdot (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2n}, \Gamma_0) = \left(\sum_{j=1}^{2n+1} T_{1,j} (S^{-1})^t \Gamma_j S^{-1}, \ldots, \sum_{j=1}^{2n+1} T_{2n+1,j} (S^{-1})^t \Gamma_j S^{-1} \right),$$

donde $\Gamma_{2n+1} := \Gamma_0$.

Fijaremos ahora la siguiente notación:

$$(\hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_{2n}, \hat{\Gamma}_0) = (T, S) \cdot (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2n}, \Gamma_0),$$

por lo que, en términos de la notación por bloques para T, S y Γ_i, las ecuaciones para la acción izquierda se pueden reescribir como:

$$r^2 B^t \hat{h}_j B = \sum_{k=1}^{2n} B_{j,k} h_k, \quad j = 1, \ldots, 2n. \tag{4.2}$$

$$r^2 \; B^t \hat{\lambda} = \lambda. \tag{4.3}$$

$$r^2 (B^t \hat{h}_0 B + \sigma (B^t \hat{\lambda})^t + B^t \hat{\lambda} \sigma^t) = \sum_{k=1}^{2n} \tau_k h_k + \delta h_0. \tag{4.4}$$

Lema 4.2.2. La ecuación 4.3 implica la ecuación 4.2.

Demostración. Sea $E_j(\lambda)$ la matriz que en la columna j tiene a λ y las demás columnas son cero, es fácil verificar que

$$h_j = E_j(\lambda) + E_j(\lambda)^t, \quad j = 1, \ldots, 2n$$

y por tanto $\hat{h}_j = E_j(\hat{\lambda}) + E_j(\hat{\lambda})^t$, por lo que:

$$\begin{aligned} r^2 B^t \hat{h}_j B &= r^2 B^t (E_j(\hat{\lambda}) + E_j(\hat{\lambda})^t) B \\ &= r^2 B^t E_j(\hat{\lambda}) B + r^2 B^t E_j(\hat{\lambda})^t B \\ &= r^2 B^t E_j(\hat{\lambda}) B + B^t (r^2 B^t E_j(\hat{\lambda}))^t \\ &= E_j(\lambda) B + B^t E_j(\lambda)^t \\ &= \sum_{k=1}^{2n} B_{j,k} h_k. \end{aligned}$$

□

4.2.2. Determinación de las órbitas

Dadas las ecuaciones 4.2, 4.3 y 4.4 para la acción izquierda $G \times \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0) \to \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0)$, haremos el análisis en dos casos.

Caso $\hat{\lambda} = 0$

Claramente se obtiene que las formas canónicas para h_i con $i = 1, \ldots, 2n$ deben ser trivialmente cero. Con lo que se cumplen 4.2 y 4.3. Mientras que la ecuación 4.4 se reduce a

$$\delta h_0 = r^2 B^t \tilde{h_0} B. \tag{4.5}$$

Denotemos por $\mathrm{Sym}(2n, \mathbb{F})$ a los espacios vectoriales generados por todas las matrices simétricas de $2n \times 2n$ sobre el campo $\mathbb{F}$.

Recordemos que $B^t JB = \delta J$ donde $B \in \mathrm{GL}\,(2n, \mathbb{F})$. Observemos además que $\mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{F}) \subseteq G$ tomando $\delta = 1$. Por lo que, una vez más, la ecuación 4.5 se reduce a

$$h_0 = r^2 B^t \hat{h}_0 B. \tag{4.6}$$

Por otro lado, definamos $B' = rB$. Entonces $(B')^t JB' = r^2 \delta J$, basta elegir $r^2 \delta = 1$ para que $B' \in \mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{F})$.

Por lo que llegamos al siguiente resultado:

Lema 4.2.3. Para el caso $\hat{\lambda} = 0$. Las órbitas de la acción izquierda de G sobre $\mathrm{Sym}(2n, \mathbb{F})$ son las mismas que las de la acción izquierda de $\mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{F})$ sobre $\mathrm{Sym}(2n, \mathbb{F})$; es decir, $G \cdot h = \mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{F}) \cdot h$ para toda $h \in \mathrm{Sym}(2n, \mathbb{F})$.

Entonces la clasificación, hasta isomorfismo, de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ cuando $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_{2n+1}$ y $\hat{\lambda} = 0$ es descrita por los representantes de las órbitas de la acción (por congruencia) izquierda $\mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{F}) \times \mathrm{Sym}(2n, \mathbb{F}) \to \mathrm{Sym}(2n, \mathbb{F})$ dada por $B \cdot h = B^t h B$.

Caso $\hat{\lambda} \neq 0$

En este caso, iniciamos con la ecuación 4.3, eligiendo r y B de tal forma que

$$r^2 B^t \hat{\lambda} = (1, 0, \ldots, 0)^t =: e_1.$$

Por lo que falta analizar la ecuación 4.4, que en este caso se reduce a:

$$r^2 B^t \hat{h}_0 B + \sigma(r^2 B^t \hat{\lambda})^t + r^2 B^t \hat{\lambda}\sigma^t = \sum_{k=1}^{2n} \tau_k h_k + \delta h_0,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
\delta h_0 &= r^2 B^t \hat{h}_0 B - \sum_{k=1}^{2n} \tau_k h_k + (\sigma e_n^t + e_n \sigma^t) \\
&= r^2 B^t \hat{h}_0 B - \sum_{k=1}^{2n} \tau_k h_k + (E_n(\sigma) + E_n(\sigma)^t) \\
&= r^2 B^t \hat{h}_0 B + \begin{bmatrix} 2(\sigma_1 - \tau_1) & \sigma_2 - \tau_2 & \sigma_3 - \tau_3 & \cdots & \sigma_{2n} - \tau_{2n} \\ \sigma_2 - \tau_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_3 - \tau_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{2n} - \tau_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Observación 4.2.2. Notemos que la elección $\lambda = e_1$ es irrelevante, es decir, basta con que $\lambda \neq 0$, para ello, observemos que

$$h_i = E_i(\lambda) = \lambda e_i^t + e_i \lambda^t = \lambda \otimes e_i + e_i \otimes \lambda,$$

por lo tanto $\{h_1, \ldots, h_{2n}\}$ son linealmente independientes si y solo sí $\lambda \neq 0$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{2n} \tau_k h_k + E_n(\sigma) + E_n(\sigma)^t \in U,$$

donde $U = \langle h_1, \ldots, h_{2n} \rangle$. En otras palabras, el número de parámetros que quedan después de elegir λ, es independiente de la elección de λ.

De tal forma que la clasificación, hasta isomorfismo, de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ cuando $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_{2n+1}$ y $\hat{\lambda} \neq 0$ requerirá del análisis de cada uno de los bloques de h_0 el cual no será considerado en este trabajo.

Conclusión

Dado que las formas canónicas para las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ cuando $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$ son el álgebra de Lie Heisenberg y $\hat{\lambda} = 0$ se restringe a determinar las órbitas de la acción por congruencia del grupo $\mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{R})$ bajo las matrices simétricas. A continuación enunciamos los resultados que determinan que las formas canónicas de $\mathfrak{g}$ cuando $\hat{\lambda} = 0$ es una aplicación de las formas canónicas para matrices Hamiltonianas.

De la Proposición A.0.4 en el Apéndice §A, tenemos que las órbitas de la acción por congruencia del grupo de Lie simpléctico bajo el espacio de matrices simétricas son las mismas que las órbitas de la acción por congruencia del grupo de Lie simpléctico bajo el álgebra de Lie simpléctica.

También en el Apéndice §A, podemos observar que las órbitas de la acción por congruencia del grupo de Lie simpléctico bajo el espacio de matrices simétricas son las mismas que las órbitas de la acción por conjugación del grupo de Lie simpléctico bajo el álgebra de Lie simpléctica.

Y entonces, las formas canónicas para las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ cuando $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$ son el álgebra de Lie Heisenberg y $\hat{\lambda} = 0$ son precisamente las formas canónicas para las matrices Hamiltonianas.

Apéndice A

Algunas acciones interesantes

Proposición A.0.4. Existe un isomorfismo entre el espacio de matrices simétricas y el álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$.

Demostración. $(\mathrm{Sym}(2n, \mathbb{R}), [\cdot, \cdot]_J)$ es un álgebra de Lie donde $[X, Y]_J = XJY - YJX$ para todos $X, Y \in \mathrm{Sym}(2n, \mathbb{R})$.

El morfismo de álgebras de Lie $\varphi : (\mathrm{Sym}(2n, \mathbb{R}), [\cdot, \cdot]_J) \to (\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$ tal que $X \mapsto JX$ es un isomorfismo ya que J es invertible. $\square$

En el Capítulo §3 trabajamos con la acción por conjugación de $\mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{R})$ en su álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) & \to & \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \\ (B, k) & \mapsto & B^{-1}kB \end{array}$$

Mientras que en el Capítulo 4 trabajamos con la acción por congruencia de $\mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{R})$ en las matrices simétricas $\mathrm{Sym}(2n, \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathrm{Sp}\,(2n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}(2n, \mathbb{R}) & \to & \mathrm{Sym}(2n, \mathbb{R}) \\ (B, h) & \mapsto & B^t h B \end{array}$$

Además, acabamos de mostrar que existe un morfismo de álgebras entre $\mathrm{Sym}(2n,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Sym}(2n,\mathbb{R}) &\to \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) \\ h &\mapsto Jh \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} B^{-1}kB &= B^{-1}(Jh)B \\ &= B^{-1}Jh(J^2)B \\ &= (JB)^{-1}(hJ)(JB). \end{aligned}$$

De modo que se cumple el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}\,(2n,\mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}(2n,\mathbb{R}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathrm{Sym}(2n,\mathbb{R}) \arrow[d, "\varphi"'] \\ \mathrm{Sp}\,(2n,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Y entonces las órbitas de la acción por congruencia del grupo de Lie simpléctico bajo el espacio de matrices simétricas son las mismas que las órbitas de la acción por conjugación del grupo de Lie simpléctico bajo el álgebra de Lie simpléctica.

Apéndice B

Formas canónicas de $\mathfrak{h}_5 \oplus \mathfrak{h}_5$

A continuación se presenta de manera explícita el procedimiento para la clasificación de las superálgebras de Lie $(\mathfrak{g}, \rho, \Gamma)$ cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_5$ y ρ está determinada por la representación adjunta.

Sean $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_0\}$ y $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_0\}$ bases de $\mathfrak{h}_5$. Denotemos por $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_5 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_0 \rangle$ y $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_5 = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_0 \rangle$.

Por definición, $\mathfrak{h}_5 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_0 \rangle$ es tal que $[e_1, e_2] = e_0$ y $[e_3, e_4] = e_0$. De manera que, al considerar $\rho : \mathfrak{h}_5^0 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{h}_5^1)$ la representación adjunta, obtenemos:

$$[e_1, f_2] = f_0, \quad [e_2, f_1] = -f_0, \quad [e_3, f_4] = f_0, \quad [e_4, f_3] = -f_0.$$

Ahora, sea $\Gamma : \mathfrak{h}_5^1 \times \mathfrak{h}_5^1 \to \mathfrak{h}_5^1$ bilineal, simétrica y equivariante, luego

$$\frac{1}{2}\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{15}^5,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{24}^4 = \Gamma_{25}^5,$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}\Gamma_{33}^3 = \Gamma_{34}^4 = \Gamma_{35}^5,$$

$$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{34}^3 = \frac{1}{2}\Gamma_{44}^4 = \Gamma_{45}^5.$$

Por lo tanto, $\Gamma \in \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0)$ se corresponde con $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_0)$ donde:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} h_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_4 = \begin{bmatrix} h_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{bmatrix} h_0 & \lambda \\ \lambda^t & 0 \end{bmatrix}.$$

Y

$$h_1 = \begin{bmatrix} 2a & b & c & d \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 2b & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a & b & 2c & d \\ 0 & 0 & d & 0 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ a & b & c & 2d \end{bmatrix},$$

$$h_0 = \begin{bmatrix} e & f & g & h \\ f & i & j & k \\ g & j & l & m \\ h & k & m & n \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Donde los parámetros son definidos por $\Gamma_{15}^5 := a$, $\Gamma_{25}^5 := b$, $\Gamma_{35}^5 := c$, $\Gamma_{45}^5 := d$, $\Gamma_{11}^5 := e$, $\Gamma_{12}^5 := f$, $\Gamma_{13}^5 := g$, $\Gamma_{14}^5 := h$, $\Gamma_{22}^5 := i$, $\Gamma_{23}^5 := j$, $\Gamma_{24}^5 := k$, $\Gamma_{33}^5 := l$, $\Gamma_{34}^5 := m$, $\Gamma_{44}^5 := n$.

Ahora, por la Proposición 4.1.3, $T \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_5(\mathbb{F}))$ si y sólo sí

$$T = \begin{bmatrix} B & 0 \\ \tau^t & \delta \end{bmatrix},$$

donde $B = \begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix}$, $i, j = 1, \cdots, 4$, $\tau^t = \begin{bmatrix} T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} \end{bmatrix}$ y $\delta = T_{11}T_{44} + T_{21}T_{34} - T_{31}T_{24} - T_{41}T_{14} \neq 0$.

Y debemos determinar $S \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_1)$ que satisface que para toda $T \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_5^0)$,

$$(T^{-1} \circ S) \circ \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x) \circ (T^{-1} \circ S).$$

Por el Lema 4.2.1, $R = \begin{bmatrix} r\mathrm{Id}_4 & 0 \\ \alpha^t & r \end{bmatrix}$, donde $\alpha^t = \begin{bmatrix} R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} \end{bmatrix}$. Y entonces

$$S = r \begin{bmatrix} B & 0 \\ \sigma^t & \delta \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{B^{-1}}{r} & 0 \\ \frac{-\sigma^t B^{-1}}{r\delta} & \frac{1}{r\delta} \end{bmatrix}, \text{ donde } \sigma^t = \tau^t + \frac{\delta}{r}\alpha^t.$$

Recordemos que la acción izquierda $G \times \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0) \to \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0)$ está dada por

$$\tilde{\Gamma}_i \mapsto \sum_{j=0}^{4} T_{ij}(S^{-1})^T \Gamma_j S^{-1}, \text{ donde } i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Y las ecuaciones para la acción izquierda $G \times \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0) \to \mathrm{Sym}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0)$ se pueden reescribir como:

$$r^2(B^t \tilde{h}_i B) = T_{i1}h_1 + T_{i2}h_2 + T_{i3}h_3 + T_{i4}h_4, \text{ para } i = 1, \cdots, 4. \tag{B.1}$$

$$r^2 B^t \tilde{\lambda} = \lambda. \tag{B.2}$$

$$r^2\Big(B^t \tilde{h}_0 B + \sigma(B^t\tilde{\lambda})^t + B^t\tilde{\lambda}\sigma^t\Big) = T_{51}h_1 + T_{52}h_2 + T_{53}h_3 + T_{54}h_4 + \delta h_0. \tag{B.3}$$

Y para determinar las órbitas procedemos con dos casos:

Caso 1. $\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = 0.$

Claramente $\lambda = 0$ y entonces $h_1, h_2, h_3, h_4 = 0$. Por lo que se cumplen B.1 y B.2. Mientras que la ecuación B.3, tomando $\delta = 1$ se reduce a:

$$h_0 = r^2 B^t \tilde{h}_0 B.$$

Según la Proposición A.0.4, hay un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathrm{Sym}(4, \mathbb{F})$ y $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{F})$. Por lo que las posibles formas canónicas de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$

cuando $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_5$ y $\hat{\lambda} = 0$ es descrita por los representantes de las órbitas de la acción izquierda $\mathrm{Sp}\,(4,\mathbb{F}) \times \mathfrak{sp}(4,\mathbb{F}) \to \mathfrak{sp}(4,\mathbb{F})$ dada por $B \cdot h = B^{-1}hB$.

Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tenemos las mismas formas canónicas que las expuestas en el Capítulo 2, sección 2.2, con una quinta fila y quinta columna de ceros. Las cuales pueden ser dadas siguiendo el procedimiento expuesto en el Capítulo 3 al calcular el conjunto de valores propios de la matriz Hamiltoniana h. Estas son:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \pm b_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp b_1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Raíz compleja $\alpha = a + ib$ — Raíz imaginaria pura (distintas) $\alpha = ib_1$, $\beta = ib_2$ — Raíz imaginaria pura (repetidas) $\alpha = \beta = ib_1$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Raíz imaginaria pura y raíz real $\alpha = ib_1$, $\beta = a$ — Raíz real (distintas) $\alpha = a$, $\beta = b$ — Raíz real (repetidas) $\alpha = \beta = a$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Raíz cero (multiplicidad 4) $\alpha = 0$

Caso 2. $\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} \neq 0.$

Elegimos $r^2 B^t \tilde{\lambda} = (1, 0, 0, 0)^t =: e_1$. Por lo que la ecuación B.3, se reduce a:

$$\delta h_0 = r^2 B^t \tilde{h_0} B + \begin{bmatrix} 2(\sigma_1 - \tau_1) & \sigma_2 - \tau_2 & \sigma_3 - \tau_3 & \sigma_4 - \tau_4 \\ \sigma_2 - \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_3 - \tau_3 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_4 - \tau_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Además, de la Observación 4.2.2 sabemos que la elección de $\hat{\lambda} := e_1$ es irrelevante. Por lo tanto, las posibles formas canónicas de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ cuando $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_5$ y $\hat{\lambda} \neq 0$ correspondientes a $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 estan dadas por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Y para Γ_0 faltaría analizar los bloques de la matriz h_0 donde las posibles formas canónicas de dependerán de si el campo es sobre los reales o complejos.

Bibliografía

[1] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, 1870.

[2] M. W. Hirsch y S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, Berkeley, 1974.

[3] H. Weyl, *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*, Princeton, University Press, 1939.

[4] J. Williamson, *On the algebraic problem concerning the normal forms of lineal dynamical systems*, American Journal of Mathematics, Vol. 58, No. 1 (Jan., 1936), pp. 141-163.

[5] A. J. Laub y K. Meyer, *Canonical forms for symplectic and Hamiltonian matrices*, 1972.

[6] M. T. Duong y R. Ushirobira, *Singular cuadratic Lie superalgebras*, J. Algebra vol 407 (2014) pp. 372-412.

[7] M. Scheunert, *The Theory of Lie Superalgebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 716, Springer, New York, 1979.

[8] V.G, Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math. 26, 1977.

[9] S. Lang, *Linear Algebra*, Springer, Yale University, 3d ed., 1987.

[10] J. Gentle *Matriz Algebra Theory: Computations and Applications in Statics*, Springer, 2007.

[11] M. Do Carmo, *Differential Geometry*, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brazil, 1992.

[12] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, University of Washington, 3d ed., 2010.

[13] Scheunert,M. *The Theory of Lie Superalgebras, an Introduction.* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1979.

[14] Onishchik, A.L. and Vinberg, E.L. *Lie Groups and Algebraic Groups.* Berlin: Springer-Verlag. 1990.

[15] Rubin, J.L. and Winternitz,P. *Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals.* J. Phys. A: Math. Gen.,Vol 26, pp. 1123-1138, 1993.

[16] Goze, M. and Khakimdjanov,Y. *Nilpotent Lie Algebras.* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[17] Salgado, G., and O.A. Sánchez-Valenzuela, *Lie superalgebras Based on* $\mathfrak{gl}_n$ *Associated to the Adjoint Representation, and Invariant Geometric Structures defined on them.* Commun. Math. Phys., **241** (2003), 505-518

[18] Hernández, I., Salgado, G, and O.A. Sánchez-Valenzuela. *Lie superalgebras based on a 3-dimensional real or complex Lie algebra.* Jour. of Lie Theory, Vol. **16** (2006) 539-560

[19] K. Meyer, G. Hall y D. Offin, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and N-Body Problem*, Springer, vol. 90, 2d ed., 2009.

[20] Peniche, R., and Sánchez-Valenzuela, O.A. *On Heisenberg-like super group structures.* Ann. Henri Poincaré 10 (2010) 1395-1417.

[21] R. Peniche, M.C. Rodriguez-Vallarte y G. Salgado, *Real canonical forms for the adjoint action of the Lie groups* $Sp(V,B)$ *and* $O(V,B)$ *on their Lie algebras*, (enviado a publicación).