



Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas

Clasificación de Grupos Kleinianos Complejos
Cuyo Conjunto Límite es una Línea

Tesis

presentada por

L.M. José Alberto May Garrido

en opción al título de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

Mérida, Yucatán, Diciembre de 2015

*Gracias Dios mío, gracias por todo sin ti no
lo hubiese logrado, gracias por ponerme
a todas esas personas en el camino.*

*Dedicado a toda mi familia,
en especial a mi hijo Mateo.*

Agradecimientos

Al CONACYT por el apoyo económico brindado durante la maestría.

A mis asesores, el Dr. Juan Pablo Navarrete Carrillo y el Dr. Waldemar Barrera Vargas, por darme la confianza y la oportunidad de trabajar bajo su dirección, por sus enseñanzas, consejos, comprensión y sobre todo, por la ayuda brindada durante todo este tiempo.

Al Dr. Didier Solis por el tiempo dedicado en la revisión de este trabajo, sus consejos y sus valiosas aportaciones.

A los profesores de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán por sus valiosas enseñanzas y apoyos.

A mis amigos, por toda la ayuda, comprensión y apoyo brindado durante todo este tiempo.

A la Universidad Autónoma de Yucatán por todo el apoyo ofrecido, por medio de la Facultad de Matemáticas.

A toda mi familia, por todo el apoyo, esfuerzo, cariño y paciencia que me otorgaron durante mis estudios.

A toda la gente que de algún modo me ayudó.

A todos mil gracias.....

Índice general

Agradecimientos	I
Índice de figuras	v
Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Geometría afín	1
1.1.1. Transformaciones afines	1
1.2. Geometría proyectiva	2
1.2.1. El espacio proyectivo complejo	3
1.2.2. Plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$	4
1.2.3. Funciones pseudo-proyectivas	6
1.3. Algebra lineal	9
1.3.1. Formas canónicas de los elementos de $SL(3, \mathbb{C})$	9
2. Elementos de $PSL(3, \mathbb{C})$ y el conjunto límite	11
2.1. El conjunto límite de Kulkarni	11
2.1.1. Propiedades del conjunto límite de Kulkarni	13
2.2. $\Lambda(G)$ para subgrupos cíclicos de $PSL(3, \mathbb{C})$	22
2.3. Clasificación de Automorfismos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$	24
3. Grupos elementales con $\Lambda(G) = \ell$	27
3.1. Grupos actuando propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$	27
3.2. G contiene un elemento loxo-parabólico	29
3.2.1. Ejemplos de grupos que contienen loxo-parabólicos	36
3.3. G no contiene elementos loxo-parabólicos	38
3.3.1. Ejemplos de grupos que no contienen loxo-parabólicos	58
3.4. Dominios fundamentales débiles	61
3.4.1. Dominios fundamentales	61
3.4.2. Dominios fundamentales débiles	62
3.4.3. Ejemplos de DFD	64

Conclusiones	81
A. Geometría de grupos	83
A.1. El n -espacio euclidiano	83
A.2. Isometrías del espacio hiperbólico	85
A.2.1. Grupos topológicos	85
A.2.2. Grupos discretos	87
A.2.3. Grupos euclidianos discretos	89
B. Teoremas importantes	93
B.1. Topología	93
B.2. Grupos kleinianos complejos	98
B.2.1. Clasificación de los elementos de $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$	98
B.3. Grupos de Lie	101
B.3.1. Variedades complejas	102
B.3.2. Grupos de Lie nilpotentes	102
C. Superficies complejas compactas	105
C.1. Introducción	105
C.2. Preliminares Algebraicos	105
C.3. Preliminares topológicos	108
C.4. El teorema principal	112
Bibliografía	114

Índice de figuras

3.1. Dominio fundamental débil para G_1	64
3.2. Espacio cociente D_1/G_1	68
3.3. Dominio fundamental débil para G_3	69
3.4. Espacio cociente D_3/G_3	74
3.5. Dominio fundamental débil para G_5	75
3.6. Espacio cociente D_5/G_5	78

Introducción

El siglo XIX es considerado el siglo de oro del desarrollo de la geometría elemental. Se destaca la creación de las geometrías no euclidianas, tales como la geometría proyectiva, la geometría hiperbólica, la geometría sintética y por su puesto, los grupos kleinianos entre otras más. El mismo sentido que estimuló esos desarrollos geométricos espectaculares, sigue vivo también hoy en campos como la teoría de grafos, la teoría de cuerpos convexos, la geometría combinatoria, la geometría fractal, la geometría estadística y la topología.

Del mismo modo que Descartes había utilizado en su momento el álgebra para estudiar la geometría, los matemáticos, el alemán Félix Klein y el noruego Marius Sophus Lie lo hicieron con el álgebra del siglo XIX.

Lie aplicó el álgebra del siglo XIX a una teoría geométrica de ecuaciones diferenciales, mediante grupos continuos de transformaciones conocidas como grupos de Lie. Mientras que Klein sistematizó la geometría usando la teoría de grupos en algo que se llamó el programa de Erlangen. Para él una geometría era el estudio de las propiedades de figuras que se mantienen invariantes cuando se aplica un grupo de transformaciones. A diferencia de Lie, Klein se enfatizó en los grupos discontinuos.

Adentrandonos más a los grupos kleinianos. Éstos fueron introducidos por Henri Poincaré en la década de los ochenta de aquel mismo siglo (siglo XIX) como los grupos de monodromía de ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden en el plano complejo \mathbb{C} , y jugaron un papel importante en muchos campos de las matemáticas, como por ejemplo en superficies de Riemann y teoría de Teichmüller, formas automorfas, dinámica holomorfa, geometría hiperbólica y conforme, teoría de 3-variedades, teoría de iteración de mapeos racionales, etc.

En el sentido clásico, los grupos kleinianos se definen como subgrupos de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, que actúan en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong \mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ con región de discontinuidad no vacía. Equivalentemente, se pueden considerar como grupos de isometrías del espacio hiperbólico real de dimensión 3, o como grupos de automorfismos conformes de la esfera \mathbb{S}^2 . Estos grupos se clasifican en elementales y no elementales. Los grupos elementales son aquellos grupos kleinianos cuyo conjunto límite es igual a 0, 1 ó 2 puntos, y los no elementales son los grupos kleinianos cuyo

conjunto límite contiene más de 2 puntos y en este caso, dicho conjunto es un conjunto perfecto (ver [20]).

Gran parte de la teoría de grupos kleinianos se ha generalizado a grupos Kleinianos conformes en dimensiones superiores, es decir, a grupos de transformaciones conformes de la esfera \mathbb{S}^n cuya región de discontinuidad sobre la esfera no es vacía.

Los grupos kleinianos complejos fueron introducidos por J. Seade y A. Verjovsky en [29], como subgrupos de $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, el espacio proyectivo complejo de dimensión n , cuyo conjunto límite (según Kulkarni) no es todo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.

Siempre que un subgrupo discreto Γ de $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$ actúe propia y discontinuamente en un conjunto abierto invariante $\Omega \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, el espacio cociente Ω/Γ es una orbivariiedad equipada con una estructura proyectiva, y el estudio de estructuras proyectivas holomorfas en variedades complejas y orbivariiedades es un área rica de la investigación actual. Esto incluye la teoría de variedades complejas afines y variedades hiperbólicas complejas. Por lo tanto la teoría de grupos kleinianos complejos proporciona un medio para estudiar estos campos importantes de matemáticas [15].

Nuestro interés radica en el estudio de los grupos kleinianos complejos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, estos son subgrupos discretos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ que actúan propia y discontinuamente en algún subconjunto abierto de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. En este caso, el conjunto límite de Kulkarni contiene una línea proyectiva siempre que el grupo sea infinito (ver [10]). Además, en [6] se prueba que bajo ciertas hipótesis del grupo, el conjunto límite de Kulkarni es una unión de líneas proyectivas complejas. Al igual que en el caso clásico, estos grupos se dividen en elementales y no elementales, en este contexto los grupos elementales son aquellos que tienen como conjunto límite de Kulkarni una unión finita de subespacios proyectivos complejos (ver [9]).

Un problema interesante consiste en clasificar a todos los grupos kleinianos complejos elementales, y un paso natural, el cual es nuestro **objetivo**, consiste en clasificar aquellos subgrupos discretos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ cuyo conjunto límite de Kulkarni sea igual a una línea proyectiva compleja.

El presente trabajo consta de 3 capítulos y 3 apéndices.

En el primer capítulo presentamos una breve introducción de la geometría afín y de la geometría proyectiva, también damos algunos resultados de álgebra lineal, dichos temas y resultados nos serán de gran utilidad. Comenzamos introduciendo el concepto de transformaciones afines y el concepto de espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, posteriormente analizamos los casos particulares de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, dados por la línea proyectiva $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ y el plano proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. En una subsección aparte, damos la definición de funciones pseudo-proyectivas y enunciamos un

lema (ver [6]) que nos garantiza, que dada una sucesión (γ_n) de elementos en $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, entonces existe una subsucesión, también denotada por (γ_n) , y una función pseudo-proyectiva S que cumplen las siguientes condiciones:

- (1) La sucesión (γ_n) converge uniformemente a S sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \mathrm{Ker}(S)$;
- (2) Si $\mathrm{Im}(S)$ es una línea compleja, entonces existe una función pseudo-proyectiva T tal que $\gamma_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \mathrm{Ker}(T)$. Además, $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Ker}(T)$ y $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Im}(T)$;
- (3) Sea (γ_n) , tal que (γ_n) converge uniformemente a S . Si $\mathrm{Ker}(S)$ es una línea compleja, entonces existe una función pseudo-proyectiva T tal que $\gamma_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \mathrm{Ker}(T)$ y $\mathrm{Im}(S) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Por otra parte, si l es una línea compleja que no pasa por $\mathrm{Im}(S)$ entonces la sucesión de líneas complejas $\gamma_n^{-1}(l)$ converge a la línea compleja $\mathrm{Ker}(S)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente, en la sección de álgebra lineal presentamos las posibles formas canónicas de jordan para todo \mathfrak{g} en $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$.

En el capítulo 2 introducimos la definición de conjunto límite según Kulkarni [18], el concepto de grupos kleinianos complejos, así como también algunas propiedades del dominio de discontinuidad. Cabe destacar que este conjunto límite se define de manera no estándar, pero la definición se justifica por el hecho que nos proporciona una manera canónica de elegir un conjunto cerrado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, en cuyo complemento la acción del grupo es propia y discontinua. No se puede tomar como conjunto límite únicamente la cerradura de los puntos de acumulación de las órbitas, como en el caso clásico, puesto que la acción en el complemento de dicho conjunto no es necesariamente propia y discontinua. En los grupos kleinianos clásicos el conjunto límite de Kulkarni coincide con el usual porque se tienen propiedades conformes que no se tienen en nuestro caso. Desafortunadamente, el dominio de discontinuidad no es generalmente el abierto más grande sobre el cual la acción del grupo es propiamente discontinua. Por otra parte, una de las propiedades de mayor importancia sobre el conjunto límite de Kulkarni, es el dado por la proposición 2.3, el cual nos dice que si H es un subgrupo de índice finito de $G \leq \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, entonces H y G tienen el mismo conjunto límite, este resultado es de gran ayuda, ya que a veces resultará ser más sencillo calcular el conjunto límite de H que el de G ó viceversa.

En las secciones subsecuentes proporcionamos los conjuntos límites de Kulkarni, que resultan de los subgrupos cíclicos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ generados por \mathfrak{g} , donde $\mathfrak{g} \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ está en su forma canónica de Jordan (ver [15]), y también presentamos la clasificación de automorfismos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, estos pueden clasificarse como elípticos, parabólicos o loxodrómicos (ver [24]).

En el tercer capítulo se analizan los subgrupos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ que actúan propia y discontinuamente en el complemento de una línea proyectiva compleja, es decir, en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$, donde $\ell = \overleftrightarrow{e_1, e_2}$. Estos subgrupos contienen únicamente elementos elípticos, parabólicos ó loxo-parabólicos (ver sección 3.1). Posteriormente, se procede a la clasificación de los subgrupos discretos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ cuyo conjunto límite de Kulkarni es igual a una línea proyectiva compleja, dicha clasificación consta de las siguientes dos partes (ver teorema 3.2):

- (1) Si el subgrupo G contiene un elemento loxo-parabólico. Entonces, existe una línea proyectiva compleja invariante donde la acción del grupo es propia y discontinua excepto en un punto. Por lo tanto el grupo actúa como un grupo euclidiano sobre esta línea.
- (2) Si el subgrupo G no contiene elementos loxo-parabólicos, entonces obtenemos los siguientes dos casos:
 - (a) Si G actúa en el conjunto límite $\ell \cong \hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$ sin elementos parabólicos, entonces G puede ser considerado como un grupo isometrías euclidianas de \mathbb{R}^4 .
 - (b) Si algún elemento en G actúa en el conjunto límite ℓ como un elemento parabólico, entonces G puede ser identificado con un grupo de matrices triangulares (ver proposición 3.2). La existencia de elementos elipto-parabólicos irracionales en G está condicionada por las proposiciones 3.3 y 3.4. Finalmente existe un subgrupo unipotente de índice finito (ver proposición 3.5).

Esta clasificación nos permite estudiar el espacio cociente $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ por el grupo G , aún cuando éste no sea compacto. El caso donde la acción de $G \leq \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ es libre, propia y discontinua, y el cociente es compacto es tratado en [14] y [28].

Por otra parte, si $G \leq \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ satisface que su conjunto límite es igual a una línea, entonces G actúa propia y discontinuamente en el complemento de una línea en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, así G puede ser considerado como un subgrupo discreto transformaciones afines complejas ($\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$) que actúan propia y discontinuamente en \mathbb{C}^2 . Sin embargo, en el teorema 3.1, se demuestra que el recíproco es falso.

Por último concluimos este capítulo dando algunos ejemplos de cada tipo de grupo, y únicamente para tres de estos grupos, hallamos lo que se conoce como dominio fundamental débil (ver def. 3.2).

En el apéndice A repasamos un poco acerca de los grupos discretos euclidianos (ver [27]), y enunciamos el teorema A.7 el cual nos será de gran ayuda.

En el apéndice B incluimos algunas definiciones y resultados de topología, grupos kleinianos, así como también de grupos de Lie, entre éstos resultados, figuran el teorema

de la clasificación de los elementos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ (ver teorema B.9) y el teorema B.11, el cual trata acerca de grupos de Lie nilpotentes.

Finalmente, en el apéndice C, presentamos los resultados del artículo de J. Fillmore y J. Scheuneman sobre grupos fundamentales de superficies complejas completamente compactas y localmente afines (ver artículo [14]), estos resultados son de suma importancia, pues ayudarán a clasificar a los subgrupos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ que contienen elementos loxoparabólicos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos una breve introducción de la geometría afín y de la geometría proyectiva. Esta introducción consta de algunos conceptos y resultados que nos servirán para el desarrollo de esta tesis.

La presentación que haremos de la geometría afín y de la geometría proyectiva será de una manera poco formal, ya que sólo algunas de las definiciones y resultados serán dados de manera explícita, lo anterior es con el fin de hacer accesible el contenido de estos temas, los cuales fueron tomados de [7] y [26].

1.1. Geometría afín

La geometría afín es un puente natural entre la geometría euclidiana y la geometría proyectiva. En esta sección definiremos el concepto de punto al infinito y el concepto de transformaciones afines.

1.1.1. Transformaciones afines

Un **punto al infinito** en el plano complejo \mathbb{C}^2 , será un “punto” en el cual concurren cualesquiera dos rectas de una misma familia de paralelas, y todos los puntos al infinito forman lo que llamaremos **recta al infinito**.

Sabemos que los pares ordenados de números complejos agotan a los puntos ordinarios; en consecuencia, necesitamos otro número, que pueda ser una tercera coordenada para distinguir los puntos ordinarios de los puntos al infinito. De esta forma, convenimos en que la tercera coordenada sea 1 en el caso de los puntos ordinarios y 0 en el caso de los puntos al infinito; la razón de esto último es reflejada en la siguiente definición de **transformaciones afines**.

Definición 1.1 Una función $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una *transformación afín* si es de la forma $T(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{v}$, donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es una matriz compleja de $n \times n$ con determinante diferente de cero y $\mathbf{v} = (v_j) \in \mathbb{C}^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.1 Para $n = 2$ y $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ con $ad - bc = 1$ tenemos:

$$T(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 + v \\ cz_1 + dz_2 + w \end{pmatrix}.$$

Las transformaciones afines forman un grupo, el **grupo afín**.

Las transformaciones afines $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ pueden representarse por matrices de 3×3 como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (1.1)$$

donde la parte lineal está dada por la submatriz de entradas a, b, c, d y la traslación está dada por el vector columna $(v, w)^t$.

El tipo de punto es invariante bajo una transformación afín, pues cuando una matriz de la forma 1.1 multiplica al vector columna correspondiente a un punto ordinario $(z_1, z_2, 1)$, el resultado es un punto ordinario, es decir, tiene tercera coordenada 1, y cuando transforma un punto al infinito, el resultado es un punto al infinito, pues la tercera coordenada es nula.

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 + v \\ cz_1 + dz_2 + w \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eso significa que familias de rectas paralelas van en familias de rectas paralelas, aunque la dirección puede cambiar.

1.2. Geometría proyectiva

En esta sección introduciremos el concepto del espacio proyectivo complejo de dimensión n , y posteriormente, analizaremos los casos particulares de $n = 1$ y $n = 2$. Además también definiremos el concepto de funciones pseudo-proyectivas.

1.2.1. El espacio proyectivo complejo

Antes de construir el espacio proyectivo complejo de dimensión n ($n \in \mathbb{N}$), definimos en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ la siguiente relación de equivalencia denotada por \sim ,

$$(z_1, \dots, z_{n+1}) \sim (z'_1, \dots, z'_{n+1}) \quad \text{si existe } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tal que } z_i = \lambda z'_i. \quad (1.2)$$

En otras palabras, la lectura geométrica de esta relación de equivalencia entre los puntos de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, es que *todos los puntos de una recta que pasan por el origen, excepto el origen mismo, pertenecen a la misma clase*; y además el conjunto de las clases de equivalencia tiene dimensión n , puesto que al identificar todos los puntos de un subespacio unidimensional de \mathbb{C}^{n+1} , estamos perdiendo una dimensión.

Dado lo anterior, el **espacio proyectivo complejo de dimensión n** se define como

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) / \sim = \{\text{líneas que pasan por el vector } \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{n+1}\}.$$

Sea $[\cdot] : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ la función cociente. Si $\beta = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ es la base estándar de \mathbb{C}^{n+1} , escribiremos $[e_j] = e_j$ y si $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ entonces escribiremos $[\mathbf{z}] = [z_1 : z_2 : \dots : z_{n+1}]$.

Enseguida presentaremos uno de los casos, quizás, más conocido del espacio proyectivo, el espacio $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ conocido como la recta proyectiva; y más adelante el caso cuando $n = 2$, también llamado el *plano proyectivo* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Este último espacio es en donde desarrollaremos esta tesis, por lo cual será tratado de manera aparte.

El espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

Para poder imaginar la forma de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, tomamos primero pares de números complejos (z, w) donde $w \neq 0$. La división entre w nos da representantes del tipo $[z/w : 1]$, y eso evidencia que hay tantas clases con segunda coordenada no cero como elementos de \mathbb{C} .

En cambio, los pares con $w = 0$ forman una sola clase, $[1 : 0]$, correspondiente a la única dirección compleja que hay en \mathbb{C} : cualquier complejo no cero z se obtiene de otro no cero z' multiplicando por el complejo no cero z/z' , y entonces $[z : 0] = [z' : 0]$.

El punto $[1 : 0] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ se denota a menudo por ∞ y eso justifica escribir $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; sin embargo, ésta es una mera notación, pues los elementos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tienen todos la misma calidad. Otra notación es $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, llamado el **plano complejo extendido**.

Hay otra forma de interpretar $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$; para ello, notemos que \mathbb{C}^2 tiene dimensión real 4 y, como en el caso real, podemos restringirnos a vectores $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ de norma 1, es decir, si $z = x + iy$, $w = u + iv$, pediremos que las partes real e imaginaria satisfagan

$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$, que es la ecuación de $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, la esfera de radio 1 con centro en el origen:

$$\mathbb{S}^3 = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\}.$$

Los puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ son subespacios unidimensionales complejos de \mathbb{C}^2 por el origen (menos el origen),

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\} : w = kz, k \in \mathbb{C} \text{ fijo}\},$$

que puede interpretarse como un plano por el origen de \mathbb{R}^4 ; éste corta a \mathbb{S}^3 en una circunferencia cuyos puntos son representantes de una misma clase (en analogía con el caso real, donde los puntos antípodas de \mathbb{S}^1 resultan de cortar \mathbb{S}^1 con la recta por el origen de los puntos en la misma clase). Por eso podemos escribir:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{S}^3 / \mathbb{S}^1.$$

En cuanto a su topología, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es homeomorfo a la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 :

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

que, en este contexto, se llama la **esfera de Riemann**; la correspondencia biyectiva, continua y con inversa continua que justifica ese término es la **proyección estereográfica** (ver pag. 112 de [26]). Esta proyección tiene además la propiedad de ser **conforme**, es decir, dos curvas en la esfera que se corten formando un cierto ángulo, se proyectan en curvas del plano que se cortan formando ese mismo ángulo en valor absoluto.

Observación 1.1 Si en el espacio $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ consideramos $\|(z_0, \dots, z_n)\| = \|(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n)\|$, donde $z_k = x_k + iy_k$ y $\|(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n)\|$ es la norma definida por el producto escalar en \mathbb{R}^{2n+2} . Entonces $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$.

1.2.2. Plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

Como habíamos mencionado, el espacio en el cual trabajaremos es el plano proyectivo complejo, recordemos que éste se define como

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) / \sim,$$

donde \sim es la relación dada en 1.2. Este espacio es una variedad compleja conexa y compacta de dimensión 2.

Se dice que $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es una **línea compleja** si $[\ell]^{-1} \cup \{0\}$ es un subespacio lineal complejo de dimensión 2. Por otra parte si $[z], [w]$ son dos puntos distintos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, entonces existe una única línea proyectiva compleja que pasa por $[z]$ y $[w]$, por comodidad, esta línea proyectiva compleja será llamada simplemente línea y será denotada por $\overleftrightarrow{[z], [w]}$.

Observación 1.2 Denotaremos por \mathbb{C}^* al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Transformaciones proyectivas complejas

Consideremos la acción de \mathbb{C}^* en $GL(3, \mathbb{C})$ dada por la multiplicación usual de un escalar, entonces

$$PGL(3, \mathbb{C}) = GL(3, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$$

es un grupo de Lie cuyo elementos son llamados **transformaciones proyectivas**.

Sea $[[\cdot]] : GL(3, \mathbb{C}) \rightarrow PGL(3, \mathbb{C})$ la función cociente, $g \in PGL(3, \mathbb{C})$ y $\mathbf{g} \in GL(3, \mathbb{C})$, decimos que \mathbf{g} es un levantamiento de g si $[[\mathbf{g}]] = g$. Uno puede demostrar que $PGL(3, \mathbb{C})$ es un grupo de Lie que actúa transitivamente, efectivamente y por biholomorfismos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ por $[[\mathbf{g}]][[\mathbf{w}]] = [\mathbf{g}(\mathbf{w})]$, donde $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{g} \in GL(3, \mathbb{C})$ como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbb{C}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \\
 \downarrow [\cdot] & & \downarrow [\cdot] \\
 \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{[[\mathbf{g}]]} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\
 [\mathbf{w}] & & [[\mathbf{g}]][[\mathbf{w}]] \\
 & & \underset{[\mathbf{g}(\mathbf{w})]}{\parallel}
 \end{array}$$

Observación 1.3 Recordemos que $PSL(3, \mathbb{C})$ es el conjunto de clases de equivalencia en $SL(3, \mathbb{C})$ determinadas por la siguiente relación: sean $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in SL(3, \mathbb{C})$ entonces $\mathbf{g} \sim \mathbf{h}$ si existe una raíz cúbica de la unidad ω tal que $\mathbf{h} = \omega \mathbf{g}$.

Teorema fundamental de la geometría proyectiva

Antes de enunciar y demostrar el *teorema fundamental de la geometría proyectiva* (TFGP), veamos la siguiente definición y el siguiente lema que nos serán de suma importancia.

Definición 1.2 n puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ están en *posición general*, si cualesquiera 3 de ellos no están en una misma línea.

Lema 1.1 Dados cuatro puntos $[\mathbf{z}_1], [\mathbf{z}_2], [\mathbf{z}_3], [\mathbf{z}_4] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ en posición general, es posible encontrar representantes para ellos que cumplan $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4$.

Demostración: Cuatro puntos proyectivos en posición general, equivalen a cuatro direcciones no coplanaras de \mathbb{C}^3 , y en consecuencia, vectores en la dirección de cualesquiera tres de ellas generan un vector en la dirección de la cuarta, es decir,

$$\mathbf{z}_1 = \beta \mathbf{z}'_2 + \gamma \mathbf{z}'_3 + \delta \mathbf{z}'_4,$$

donde $\mathbf{z}'_i \in [\mathbf{z}_i]$ para $i = 2, 3, 4$ y $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}^*$.

Entonces tomando $\mathbf{z}_2 = \beta \mathbf{z}'_2$, $\mathbf{z}_3 = \gamma \mathbf{z}'_3$ y $\mathbf{z}_4 = \delta \mathbf{z}'_4$, obtenemos los representantes buscados. □

Teorema 1.1 (TFGP) Dadas dos cuartetetas $[\mathbf{z}_1], [\mathbf{z}_2], [\mathbf{z}_3], [\mathbf{z}_4]$ y $[\mathbf{w}_1], [\mathbf{w}_2], [\mathbf{w}_3], [\mathbf{w}_4]$ de puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, cada una en posición general, existe una única transformación proyectiva $g \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ tal que $[\mathbf{w}_i] = g[\mathbf{z}_i] = [\mathbf{g}(\mathbf{z}_i)]$ para $i = 1, 2, 3, 4$, donde $[[\mathbf{g}]] = g$.

Demostración: Aplicando el lema anterior a cada cuarteteta para obtener representantes tales que

$$\mathbf{z}''_1 = \mathbf{z}''_2 + \mathbf{z}''_3 + \mathbf{z}''_4, \quad \mathbf{w}''_1 = \mathbf{w}''_2 + \mathbf{w}''_3 + \mathbf{w}''_4,$$

donde $\mathbf{z}''_i \in [\mathbf{z}_i]$ y $\mathbf{w}''_i \in [\mathbf{w}_i]$ para $i = 1, 2, 3, 4$

Luego entonces, si $\mathbf{g} \in \text{GL}(3, \mathbb{C})$ es la única matriz que lleva la base $\mathbf{z}''_2, \mathbf{z}''_3, \mathbf{z}''_4$ de \mathbb{C}^3 en la base $\mathbf{w}''_2, \mathbf{w}''_3, \mathbf{w}''_4$, la linealidad implica que $\mathbf{w}''_1 = \mathbf{g}(\mathbf{z}''_1)$. □

Un corolario inmediato es el siguiente.

Corolario 1.1 Si $g \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ fija cuatro puntos en posición general, entonces $g = Id \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$.

La métrica de Fubini-Study

La métrica de **Fubini-Study** en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, es una poderosa herramienta en el cálculo del conjunto límite de Kulkarni, de subgrupos cíclicos de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ que actúan en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ (ver [25]). La métrica de Fubini-Study entre $[\mathbf{z}], [\mathbf{w}] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, denotada por $d([\mathbf{z}], [\mathbf{w}])$, satisface la ecuación

$$\cos^2(d([\mathbf{z}], [\mathbf{w}])) = \frac{|z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_3|}{(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2)}. \quad (1.3)$$

1.2.3. Funciones pseudo-proyectivas

Denotaremos por $M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ al espacio de matrices de 3×3 con entradas complejas equipadas con la topología estándar. El espacio cociente

$$(M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{C}^*$$

es llamado el espacio de **funciones pseudo-proyectivas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$** y es naturalmente identificado con el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^8$. Dado que $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ es un conjunto abierto,

denso y \mathbb{C}^* -invariante de $M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, obtenemos que el espacio de funciones pseudo-proyectivas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es una compactificación de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$. Como en el caso de funciones proyectivas, si $\mathbf{s} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces $[\mathbf{s}]$ denota a la clase de equivalencia de la matriz \mathbf{s} en el espacio de funciones pseudo-proyectivas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. De igual manera, decimos que $\mathbf{s} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ es un levantamiento de la función pseudo-proyectiva S , siempre que $[\mathbf{s}] = S$.

Sea S un elemento en $(M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{C}^*$ y \mathbf{s} un levantamiento a $M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ de S . La matriz \mathbf{s} induce una transformación lineal no cero, denotada por $s : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la cual no necesariamente es invertible. Ahora, sea $\text{Ker}(s) \subsetneq \mathbb{C}^3$ el kernel de s , en el caso de que la matriz \mathbf{s} fuera invertible, $\text{Ker}(s) = \{(0, 0, 0)\}$ y por convención $\text{Ker}(S) := \emptyset$, donde $\text{Ker}(S)$ es la proyectivización de $\text{Ker}(s)$ a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Entonces, S puede considerarse como una función

$$\begin{aligned} S : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(S) &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ S([v]) &= [s(v)]; \end{aligned}$$

luego, S está bien definida, pues $v \in \text{Ker}(s)$. Por otra parte, el diagrama conmutativo de abajo implica que S es una función holomorfa:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 \setminus \text{Ker}(s) & \xrightarrow{s} & \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \\ \downarrow [\cdot] & & \downarrow [\cdot] \\ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(S) & \xrightarrow{S} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2. \end{array}$$

La *imagen* de S , denotado por $\text{Im}(S)$, es definida como el subespacio de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ dado por

$$\text{Im}(S) := [s(\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})].$$

Lema 1.1 (ver [6]) Sea (γ_n) una sucesión de elementos en $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$, entonces existe una subsucesión, también denotada por (γ_n) , y una función pseudo-proyectiva S tal que:

- (1) La sucesión (γ_n) converge uniformemente a S sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(S)$;
- (2) Si $\text{Im}(S)$ es una línea compleja, entonces existe una función pseudo-proyectiva T tal que $\gamma_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(T)$. Además, $\text{Im}(S) = \text{Ker}(T)$ y $\text{Ker}(S) = \text{Im}(T)$;
- (3) Sea (γ_n) , tal que (γ_n) converge uniformemente a S . Si $\text{Ker}(S)$ es una línea compleja, entonces existe una función pseudo-proyectiva T tal que $\gamma_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(T)$ y $\text{Im}(S) \subset \text{Ker}(T)$. Por otra parte, si l es una línea compleja que no pasa por $\text{Im}(S)$ entonces la sucesión de líneas complejas $\gamma_n^{-1}(l)$ converge a la línea compleja $\text{Ker}(S)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración:

- (1) Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbf{g}_n = (g_{ij}^n)$ un levantamiento a $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ de γ_n . La bola unitaria en $M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^9$ con respecto a la norma $\|\mathbf{g}\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq 3} |g_{ij}|$, es un subconjunto compacto. De ello se deduce que la sucesión $\tilde{\mathbf{g}}_n = \mathbf{g}_n / \|\mathbf{g}_n\|_\infty$ tiene una subsucesión, también denotada por $\tilde{\mathbf{g}}_n$, tal que $\tilde{\mathbf{g}}_n \rightarrow \mathbf{s} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$, cuando $n \rightarrow \infty$. Observemos que $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Ahora, si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(S)$, consideremos el conjunto $C = \{v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : [v] \in K\}$ y $\tilde{K} = \{v / \|v\| \in \mathbb{C}^3 : v \in C\}$. Notemos que \tilde{K} es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ y $[\tilde{K}] = K$. Como $\tilde{\mathbf{g}}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}$ uniformemente en \tilde{K} , entonces obtenemos que $\gamma_n = [\tilde{\mathbf{g}}_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [\mathbf{s}] = S$ uniformemente en K .
- (2) De igual manera, sea $\mathbf{g}_n = (g_{ij}^n)$ un levantamiento a $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ de γ_n , para cada n en \mathbb{N} . Podemos suponer que $\mathbf{g}_n \rightarrow \mathbf{s}$, cuando $n \rightarrow \infty$, donde \mathbf{s} es un levantamiento a $M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ de la función pseudo-proyectiva S . La matriz de cofactores de \mathbf{g}_n , denotada por $\text{cof}(\mathbf{g}_n)$ es un levantamiento a $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ de γ_n^{-1} . Como el cálculo de la matriz de cofactores es una función continua en las entradas de la matriz, tenemos que $\text{cof}(\mathbf{g}_n) \rightarrow \text{cof}(\mathbf{s})$ cuando $n \rightarrow \infty$. De esto obtenemos que γ_n^{-1} converge uniformemente a la función pseudo-proyectiva $[\text{cof}(\mathbf{s})] := T$ sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(T)$. La matriz \mathbf{s} puede tener las siguientes formas canónicas de Jordan.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \neq 0 \text{ para } j = 1, 2, 3.$$

En cualquier casos la matriz $\text{cof}(\mathbf{s})$ es igual, bajo conjugación, a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0,$$

y la prueba de (2) se sigue de un cálculo muy sencillo.

- (3) Por la parte (1) podemos suponer que γ_n^{-1} converge uniformemente a la función pseudo-proyectiva T en subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(T)$. Procedamos por contradicción y supongamos que $\text{Im}(S)$ no está contenido en $\text{Ker}(T)$. Por hipótesis, $\text{Ker}(S)$ es una línea compleja, de manera que $\text{Im}(S)$ consiste de un sólo punto denotado por p , y $p \notin \text{Ker}(T)$. Ahora, si $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(S)$ entonces $S(x) = p$, de lo cual se tiene que $\gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(x) = p$. Luego, como $p \notin \text{Ker}(T)$, podemos suponer que el conjunto compacto $\{\gamma_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$ está contenido en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(T)$. Por lo tanto $x = \gamma_n^{-1}(\gamma_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(p)$. Así que la imagen bajo T de p no es única y

esto contradice que T es una función en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus Ker(T)$. Por lo tanto, $Im(S) \subset Ker(T)$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbf{g}_n = (g_{ij}^n)$ un levantamiento a $GL(3, \mathbb{C})$ de γ_n . Podemos suponer que $\mathbf{g}_n \rightarrow \mathbf{s} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$, cuando $n \rightarrow \infty$, y $[\mathbf{s}] = S$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso $Ker(S) = \overleftrightarrow{e_1, e_2}$ es precisamente el conjunto de puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que satisfacen la ecuación $0z_1 + 0z_2 + 1z_3 = 0$, entonces la línea compleja $Ker(S)$ puede ser identificada con $[0 : 0 : 1]$. Ahora, si l es una línea compleja que no pasa por $Im(S) = [e_3]$ entonces l puede ser identificado con $[A : B : C], C \neq 0$. De ello se obtiene que la línea compleja γ_n^{-1} está identificada con

$$[(A, B, C)(\mathbf{g}_n^{-1})^{-1}] = [(A, B, C)(\mathbf{g}_n)],$$

lo cual implica que la sucesión de líneas complejas $\gamma_n^{-1}(l)$ converge a la línea compleja identificada con

$$[(A, B, C)\mathbf{s}] = [0 : 0 : C] = [0 : 0 : 1],$$

y esta línea compleja es $Ker(S)$.

□

1.3. Algebra lineal

En esta sección únicamente daremos las posibles formas de Jordan para $\mathbf{g} \in SL(3, \mathbb{C})$.

1.3.1. Formas canónicas de los elementos de $SL(3, \mathbb{C})$

Sea $\mathbf{g} \in SL(3, \mathbb{C})$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de \mathbf{g} , entonces las posibles formas canónicas de Jordan para \mathbf{g} son:

(i) \mathbf{g} tiene valores propios repetidos.

(a) Si $|\lambda_i| = 1, i = 1, 2, 3$.

◦ \mathbf{g} es diagonalizable:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

- \mathbf{g} no es diagonalizable:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Si $|\lambda_i| \neq 1$ para algún $i = 1, 2, 3$, entonces el otro también es de módulo distinto de 1.

- \mathbf{g} es diagonalizable:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \text{con } |\lambda_1| \neq |\lambda_3|.$$

- \mathbf{g} no es diagonalizable:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \text{con } |\lambda_1| \neq |\lambda_3|.$$

- (ii) \mathbf{g} no tiene valores propios repetidos, entonces \mathbf{g} es diagonalizable:

- Si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$.
- Si exactamente dos tienen el mismo módulo, digamos $|\lambda_1| = |\lambda_2| \neq |\lambda_3|$.
- Si $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ cuando $i \neq j$.

Capítulo 2

Elementos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ y el conjunto límite

2.1. El conjunto límite de Kulkarni

En la siguiente sección introduciremos los conceptos del conjunto límite según Kulkarni y la de grupo kleiniano complejo, posteriormente mencionaremos algunas propiedades de este conjunto límite las cuales nos serán de gran utilidad. La mayor parte de esta sección la tomamos del artículo de Kulkarni [18].

Primero veamos lo siguiente:

Definición 2.1 Sea G un subgrupo de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$. Decimos que la acción de G en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es *propia y discontinua* en un subconjunto G -invariante Ω de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, si para cualesquiera dos subconjuntos compactos C y D de Ω , $g(C) \cap D \neq \emptyset$ solo para un número finito de $g \in G$. La acción se llama *libre* (resp. *casi libre*) en un subconjunto G -invariante Ω de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ si para cada $p \in \Omega$ el grupo de isotropía, G_p , es trivial (resp. finito).

Claramente una acción propia y discontinua es casi libre.

Observación 2.1 De ahora en adelante, cuando sea conveniente escribiremos cualquier punto $[\mathbf{z}] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ simplemente por z . Recordemos que $[\mathbf{z}] = [z_1 : z_2 : z_3]$ con $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Definición 2.2 Sea $\{A_i\}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, donde i corre sobre algún conjunto infinito de índices I , entonces un punto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ se dice que es un *punto de acumulación* (o *punto de cerradura*) de $\{A_i\}$ si cada vecindad U de p interseca a A_i para una infinidad de $i \in I$.

El conjunto límite de Kulkarni nos dará una manera canónica de elegir un conjunto cerrado y G -invariante de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ en cuyo complemento la acción del grupo es propia y discontinua.

Definición 2.3 Sea $G \leq PSL(3, \mathbb{C})$ que actúa en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, definimos los siguientes conjuntos:

1. $L_0(G)$ es la cerradura del conjunto de puntos fijos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con grupo de isotropía infinito (su estabilizador es de orden infinito).
2. $L_1(G)$ es la cerradura del conjunto de puntos de acumulación de las órbitas de todos los puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G)$, es decir, para cada $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G)$ consideramos el conjunto de puntos de cerradura de la órbita $\{g(z)\}_{g \in G}$ y $L_1(G)$ es la cerradura de la unión de todos estos conjuntos.
3. $L_2(G)$ es la cerradura del conjunto de puntos de acumulación de todas las órbitas $\{g(K)\}_{g \in G}$, donde K corre sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G))$, es decir, para cada compacto $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G))$ consideramos el conjunto de puntos de acumulación de la órbita $\{g(K)\}_{g \in G}$ y $L_2(G)$ es la cerradura de la unión de todos estos conjuntos.

Definición 2.4 El conjunto $\Lambda(G) = L_0(G) \cup L_1(G) \cup L_2(G)$ es llamado el *conjunto límite de Kulkarni* de G . El conjunto $\Omega(G) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda(G)$ es llamado el *dominio de discontinuidad de Kulkarni* de G .

Observación 2.2 Cuando no se preste a confusión, se denotará a $L_0(G), L_1(G), L_2(G)$, etc. simplemente por L_0, L_1, L_2 , etc. En el caso de que G sea un grupo cíclico generado por g (es decir, $G = \langle g \rangle$), escribiremos simplemente $L_0(g), L_1(g)$, etc. en lugar de $L_0(G), L_1(G)$, etc.

Recordemos que en geometría hiperbólica clásica de manera informal podemos pensar el conjunto límite como el conjunto de puntos de acumulación de una sola órbita, y la acción en su complemento resulta ser propia y discontinua. Esto último es consecuencia de las propiedades de geometría conforme que están implícitas en geometría hiperbólica. En este contexto, un grupo kleiniano (clásico) se puede definir como un subgrupo de isometrías del espacio hiperbólico real de dimensión n , cuya acción en la esfera en el infinito tiene región de discontinuidad no vacía. Ahora si consideramos la acción de un subgrupo G de $PSL(3, \mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tenemos una definición análoga.

Definición 2.5 Sea G un subgrupo de $PSL(3, \mathbb{C})$, se dice que G es *kleiniano complejo* si existe un conjunto $U \neq \emptyset$ que es abierto e invariante, donde G actúa propia y discontinuamente. En particular si G tiene región de discontinuidad de Kulkarni no vacía, entonces el grupo es kleiniano complejo.

2.1.1. Propiedades del conjunto límite de Kulkarni

La siguiente proposición nos dice que si G es kleiniano complejo, entonces G es discreto, i. e., G es un subgrupo de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ que es discreto como subespacio topológico. Esto es equivalente a decir que el elemento identidad de G tiene una vecindad en $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, en el cual, no hay ningún otro elemento distinto de la identidad. Además, dicha proposición también nos garantiza que G es necesariamente contable, veamos.

Proposición 2.1 Sea G un subgrupo de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, donde G tiene la *topología compacto-abierta*. Entonces $L_0(G)$, $L_1(G)$, $L_2(G)$, Λ y Ω son G -invariantes y G actúa propia y discontinuamente en Ω . Si G es Kleiniano complejo entonces G es discreto y contable.

Demostración: Si p es un punto con grupo de isotropía infinito, G_p , y $g \in G$ entonces $G_{g(p)} = gG_pg^{-1}$ también es infinito. Por lo tanto L_0 es G -invariante.

Sea $p \in L_1$, $\sigma \in G$, y tomemos U , una vecindad de $\sigma(p)$. Existe un punto $p' \in \sigma^{-1}(U)$ tal que p' es un punto de acumulación de $\{g(z)\}_{g \in G}$ para algún elemento $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 - L_0$, entonces $\sigma(p') \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 - L_0$ es un punto de acumulación de $\{\sigma g(z)\}_{g \in G} = \{g(z)\}_{g \in G}$, y además $\sigma(p') \in U$. Así que $\sigma(p) \in L_1$, y por lo tanto, L_1 es G -invariante.

Un razonamiento similar al anterior demuestra que L_2 también es G -invariante. El conjunto Λ es G -invariante porque $\Lambda = L_0 \cup L_1 \cup L_2$. El conjunto Ω es G -invariante pues $\Omega = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 - \Lambda$.

Sean C y D subconjuntos compactos de Ω . El conjunto

$$S = \{g \in G : g(C) \cap D \neq \emptyset\}$$

debe ser un conjunto finito, por que de lo contrario D contendría un punto de L_0 o uno de L_2 lo cual no puede suceder por que $\Omega \cup L_0 = \emptyset = \Omega \cap L_2$. Por lo tanto la acción de G es propiamente discontinua.

Ahora supongamos que G es kleiniano complejo. Sea C una vecindad compacta de un punto $p \in \Omega$, entonces $T \subset T'$, donde

$$T = \{g \in G : g(p) \in \overset{\circ}{C}\},$$

y

$$T' = \{g \in G : \{g(p)\} \cap C \neq \emptyset\}.$$

Dado que G actúa propia y discontinuamente en Ω , se tiene que T' es finito. Así T es un abierto finito en G que contiene a la identidad, y como la topología de G es Hausdorff,

concluimos entonces que G es discreto.

Finalmente, dado que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tiene una base contable para su topología entonces también Ω la tiene. Sea $\{U_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ una base contable de vecindades relativamente compactas en Ω y sea

$$G_n = \{g \in G : g(\overline{U_1}) \cap \overline{U_n} \neq \emptyset\}.$$

Cada G_n es finito y la unión de G_n es G . Por lo tanto, G es contable. □

La siguiente proposición nos indica como se comporta el conjunto límite bajo conjugación.

Proposición 2.2 Sean $f \in PSL(3, \mathbb{C})$ y $G \leq PSL(3, \mathbb{C})$. Entonces

- i) $L_0(fGf^{-1}) = f(L_0(G))$
- ii) $L_1(fGf^{-1}) = f(L_1(G))$
- iii) $L_2(fGf^{-1}) = f(L_2(G))$

Demostración: Tomando en cuenta que los homeomorfismos conservan propiedades topológicas, en particular las de la cerradura, es suficiente hacer la prueba para ciertos conjuntos.

- i) Sea $x \in \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid |\text{Stab}_{fGf^{-1}}(x)| \text{ es infinito}\}$, esto pasa si, y sólo si, existe una sucesión $\{h_m\} \subset fGf^{-1}$ de elementos distintos tal que $h_m(x) = x$, donde $h_m = fg_mf^{-1}$ con $g_m \in G$, pero esto también ocurre si, y sólo si, $fg_mf^{-1}(x) = x$ para una infinidad de $g_m \in G$ si, y sólo si, $g_m(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$ para una infinidad de $g_m \in G$, es decir, $f^{-1}(x) \in \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid |\text{Stab}_G(x)| \text{ es infinito}\}$, lo cual es cierto si, y sólo si, $x \in f(\{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid |\text{Stab}_G(x)| \text{ es infinito}\})$.

Por lo tanto $\{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid |\text{Stab}_{fGf^{-1}}(x)| \text{ es infinito}\} = f(\{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid |\text{Stab}_G(x)| \text{ es infinito}\})$.

ii)

Sean $A_1 = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \exists w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G) \text{ y } \{g_n\} \subset G \text{ tal que } g_n(w) \rightarrow x\}$
 $B_1 = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \exists w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(fGf^{-1}) \text{ y } \{h_n\} \subset fGf^{-1} \text{ tal que } h_n(w) \rightarrow x\}$

Sea $z \in f(A_1)$, es decir, $z = f(y)$ tal que existe una sucesión $\{g_n\} \subset G$ de elementos distintos y $w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G)$ con $g_n(w) \rightarrow y$, así $f(g_n(w)) \rightarrow f(y) = z$, luego $f \circ g_n \circ f^{-1}(f(w)) \rightarrow f(y) = z$, por otro lado si $w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G)$, entonces $f(w) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus f(L_0(G))$, pero $f(L_0(G)) = L_0(fGf^{-1})$, entonces $f(w) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(fGf^{-1})$. Con

esto hemos obtenido $f(w) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(fGf^{-1})$ y una sucesión $\{h_n\} \subset fGf^{-1}$ de elementos distintos tal que $h_n(f(w)) \rightarrow z$, es decir, $z \in B_1$.

Ahora sea $z \in B_1$, esto es, existe una sucesión $\{h_n\} \subset fGf^{-1}$ de elementos distintos y $w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(fGf^{-1}) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus f(L_0(G))$ con $h_n(w) \rightarrow z$. Luego, dado que $h_n = f \circ g_n \circ f^{-1}$ con $g_n \in G$, para todos los elementos de la sucesión, se cumple entonces $h_n(w) = f \circ g_n \circ f^{-1}(w) \rightarrow z$, lo cual implica que $g_n(f^{-1}(w)) \rightarrow f^{-1}(z)$, y como $w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus f(L_0(G))$, entonces $f^{-1}(w) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G)$, así $f^{-1}(z) \in A_1$, es decir, $z \in f(A_1)$.

Por lo tanto $f(A_1) = B_1$.

iii) Sean

$$A_2 = \left\{ x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \begin{array}{l} x \text{ es punto de acumulación de la órbita } \{g(K)\}_{g \in G}, \\ \text{donde } K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G)) \text{ es compacto} \end{array} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \begin{array}{l} x \text{ es punto de acumulación de la órbita } \{g(K)\}_{g \in fGf^{-1}}, \\ \text{donde } K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(fGf^{-1}) \cup L_1(fGf^{-1})) \text{ es compacto} \end{array} \right\}$$

Demostremos que $B_2 = f(A_2)$.

Sea $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que existe $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(fGf^{-1}) \cup L_1(fGf^{-1}))$ compacto de tal manera que z es punto de acumulación de $fGf^{-1} \cdot K$, luego entonces $f^{-1}(z)$ es punto de acumulación de $Gf^{-1} \cdot K$, además como $f^{-1}(K) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G))$ es compacto, obtenemos entonces que $f^{-1}(z) \in A_2$, y por esto último se sigue que, $z \in f(A_2)$.

Ahora sea $\omega = f(y)$ tal que existe $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G))$ compacto de tal manera que y es punto de acumulación de $G \cdot K = Gf^{-1} \cdot f(K)$, entonces $f(y) = \omega$ es un punto de acumulación de $fGf^{-1} \cdot f(K)$ y además $f(K) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G)) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(fGf^{-1}) \cup L_1(fGf^{-1}))$ es compacto, así $\omega \in B_2$.

Por lo tanto $B_2 = f(A_2)$. □

Los siguientes enunciados muestran como el conjunto límite de $G \leq \text{PSL}(3, \mathbb{C})$, sigue siendo el mismo para subgrupos de índice finito de G y para extensiones finitas de G .

Proposición 2.3 Sea H un subgrupo de índice finito de $G \leq \text{PSL}(3, \mathbb{C})$, entonces:

- i) $L_0(H) = L_0(G)$,
- ii) $L_1(H) = L_1(G)$,
- iii) $L_2(H) = L_2(G)$.

De lo cual se deduce, $\Lambda(H) = \Lambda(G)$.

Demostración: Al igual que en la proposición anterior, puesto que la cerradura de conjuntos se preserva bajo homeomorfismos, la prueba será suficiente hacerla para ciertos conjuntos que en cada inciso definiremos.

Por otra parte como $[G : H]$ es finito, supondremos sin pérdida de generalidad, que $\{Ha_1, \dots, Ha_m\}$ es el conjunto de las clases laterales derechas en G/H , para $m \in \mathbb{N}$.

i) Sean

$$A_H = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid |\text{Stab}_H(x)| \text{ es infinito}\},$$

$$A_G = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid |\text{Stab}_G(x)| \text{ es infinito}\}.$$

Demostremos que $A_H = A_G$.

Notemos primero que por definición $A_H \subset A_G$. Ahora para la otra contención, sea $x \in A_G$, esto implica que existe una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ de elementos distintos tal que $g_n(x) = x$. Luego, como $G = \bigcup_{j=1}^m Ha_j$, entonces existe una subsucesión de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denotada igual, tal que $g_n = h_n a_j$ con $h_n \in H$ y $j \in \{1, \dots, m\}$, esto implica $g_n(x) = h_n a_j(x) = x$, es decir $a_j(x) = h_n^{-1}(x)$.

Ahora, sea $h'_n = h_1 h_n^{-1}$, observemos por definición que $h'_n \in H$ y además como $h'_n = h'_m$ si, y sólo si, $h_n^{-1} = h_m^{-1}$ si, y sólo si, $n = m$, $\{h'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de términos distintos en H .

Luego, $h'_n(x) = h_1 h_n^{-1}(x) = h_1 a_j(x)$, pero $h_1 a_j(x) = h_1 h_n^{-1}(x)$, en particular para $n = 1$ obtenemos $h'_n(x) = h_1 h_1^{-1}(x) = x$, entonces $x \in A_H$, por lo tanto $A_G \subset A_H$.

Así $A_H = A_G$, de lo cual se sigue que $L_0(H) = L_0(G)$.

ii) Sean

$$B_H = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \exists w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(H) \text{ y } \{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H \text{ tal que } h_n(w) \rightarrow x\},$$

$$B_G = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \exists w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G) \text{ y } \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G \text{ tal que } g_n(w) \rightarrow x\}.$$

Probemos que $B_H = B_G$.

La primera parte de la prueba se sigue casi de la definición de B_H , veamos. Sea $x \in B_H$, esto es, existe una sucesión $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ de elementos distintos y existe $w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(H)$ tal que $h_n(w) \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, usando i) obtenemos que $w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G)$, por lo tanto $B_H \subset B_G$.

Para la otra contención sea $z \in B_G$, luego, existe una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ de elementos distintos y existe $y \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G)$ tal que $g_n(y) \rightarrow z$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Dado que $G = \bigcup_{j=1}^m Ha_j$, entonces existe una subsucesión de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denotada igual, tal que $g_n = h_n a_j$ con $h_n \in H$ y $j \in \{1, \dots, m\}$, esto implica

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(a_j(z)),$$

entonces $a_j(z) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G)$, luego de *i*) obtenemos que $a_j(z) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(H)$. Así $z \in B_H$ y por lo tanto $B_G \subset B_H$.

De esta forma $B_H = B_G$, luego entonces $L_1(H) = L_1(G)$.

iii) Sean

$$C_H = \left\{ x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \begin{array}{l} x \text{ es punto de acumulación de la órbita } \{h(K)\}_{h \in H}, \\ \text{donde } K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(H) \cup L_1(H)) \text{ es compacto} \end{array} \right\},$$

$$C_G = \left\{ x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \begin{array}{l} x \text{ es punto de acumulación de la órbita } \{g(K)\}_{g \in G}, \\ \text{donde } K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G)) \text{ es compacto} \end{array} \right\}.$$

Demostremos que $C_H = C_G$.

En efecto, al igual que en la primera parte del inciso anterior, la demostración de que $C_H \subset C_G$ se sigue inmediata usando la definición de C_H y el hecho de que $L_0(H) \cup L_1(H) = L_0(G) \cup L_1(G)$, esto último dado por *i*) y *ii*).

Por otro lado, para probar que $C_G \subset C_H$, sea $x \in C_G$, es decir, existe una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ de elementos distintos y existe $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G) \cup L_1(G)$ con K compacto, tal que x es un punto de acumulación de la familia de compactos $\{g_n(K)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Luego entonces, existe una subsucesión de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denotada igual y una sucesión $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, tal que $k_n \rightarrow K$ y $g_n(k_n) \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Como $G = \bigcup_{j=1}^m Ha_j$, entonces podemos suponer, tomando una subsucesión que $g_n = h_n a_j$ con $h_n \in H$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. Luego, x es un punto de acumulación de la familia de compactos $\{h_n(a_j(K))\}_{n \in \mathbb{N}}$, y puesto que de *i*) y *ii*) tenemos que $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G) \cup L_1(G) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(H) \cup L_1(H)$, se sigue entonces que

$$a_j(K) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(G) \cup L_1(G) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L_0(H) \cup L_1(H),$$

de esta manera $x \in L_2(H)$, por lo tanto $C_G \subset C_H$.

Así $C_H = C_G$, en consecuencia $L_2(H) = L_2(G)$.

Por último, observemos que de *i*), *ii*), *iii*) y por definición, $\Lambda(H) = \Lambda(G)$.

□

Corolario 2.1 Sea G' una extensión finita de $G \leq PSL(3, \mathbb{C})$, entonces:

- i) $L_0(G) = L_0(G')$,
- ii) $L_1(G) = L_1(G')$,
- iii) $L_2(G) = L_2(G')$.

En consecuencia, $\Lambda(G) = \Lambda(G')$.

Demostración: Puesto que G es un subgrupo de índice finito de $G' \leq PSL(3, \mathbb{C})$, la demostración se sigue de la proposición anterior. \square

Un lema que nos será de gran utilidad para calcular L_2 es el siguiente.

Lema 2.1 (Lema de minimalidad): Sea G un subgrupo de $PSL(3, \mathbb{C})$. Si $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es un conjunto cerrado tal que para cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus C$, los puntos de acumulación de la familia de conjuntos compactos $\{g(K)\}_{g \in G}$ están contenidos en $L_0(G) \cup L_1(G)$, entonces $L_2(G) \subset C$.

Demostración: Observemos primero que por propiedades de conjuntos

$$L_2(G) \subset C \Leftrightarrow L_2(G) \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus C) = \emptyset.$$

Procedamos por contradicción y supongamos que $L_2(G) \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus C) \neq \emptyset$, entonces existe un punto $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus C$, una sucesión de puntos $\{y_n\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G))$ y una sucesión $\{g_n\} \subset G$ de elementos distintos, tales que $\{y_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(G) \cup L_1(G))$ y $\{g_n(y_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus C$.

Por hipótesis $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus C$ es abierto, entonces, descartando un número finito de términos, si es necesario, podemos suponer que $\{g_n(y_n)\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus C$. Así, usando de nuevo la hipótesis, para el compacto $K = \{g_n(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\}$ se cumple que

$$g_n^{-1}(g_n(y_n)) = y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in L_0(G) \cup L_1(G),$$

lo cual es una contradicción. Entonces $L_2(G) \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus C) = \emptyset$, por lo tanto $L_2(G) \subset C$. \square

A continuación presentaremos un ejemplo, en el cual se calcula el conjunto límite de un grupo generado por un elemento llamado loxo-parabólico, este elemento será introducido posteriormente, también se mostrará que este grupo actúa propia y discontinuamente en el complemento de la línea $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$.

Antes del ejemplo, tenemos lo siguiente.

Observación 2.3 Si $[\mathbf{z}] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ con $\ell = \overleftarrow{e_1, e_2}$, entonces $[\mathbf{z}]$ es de la forma $[z_1 : z_2 : z_3]$ con $z_3 \neq 0$, así que

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}] &= [z_1/z_3 : z_2/z_3 : 1] \\ &= [w_1, w_2, 1], \quad \text{con } w_1, w_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ puede considerarse como \mathbb{C}^2 .

Ejemplo 2.1 Si $g \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ es inducida por la matriz

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad |\lambda| < 1.$$

Entonces:

- (i) $L_0(g) = \{e_1, e_2\}$.
- (ii) $g^{-n}(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e_2$, uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\overleftarrow{e_1, e_2} \cup \overleftarrow{e_1, e_3})$.
- (iii) $g^n(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e_1$, uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\overleftarrow{e_1, e_2} \cup \overleftarrow{e_1, e_3})$.
- (iv) $L_1(g) = \{e_1, e_2\}$.
- (v) $L_2(g) = \overleftarrow{e_1, e_2} \cup \overleftarrow{e_1, e_3}$.
- (vi) La acción del grupo cíclico generado por g en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{e_1, e_2\}$ no es propiamente discontinua.
- (vii) El grupo cíclico generado por g actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$.

Demostración: Para el inciso (i), hacemos las siguientes **observaciones**:

a) Un punto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tiene estabilizador infinito en el grupo cíclico generado por g si, y sólo si p es un punto fijo de g^k para algún k en los enteros, donde el orden de $\langle g^k \rangle$ es infinito.

b) Un punto $p = [v]$ es punto fijo de g si, y sólo si, v es un vector propio de \mathbf{g} .

(i) En efecto, una vez mencionado lo anterior, calculemos $L_0(g)$, para esto notemos primero lo siguiente ,

$$\mathbf{g}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Así, sea $[\mathbf{z}] \in L_0(g)$, entonces existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ tal que $g^{n_k}[\mathbf{z}] = [\mathbf{z}]$ para toda n_k , esto pasa si, y sólo si, para cada n_k existe $c_{n_k} \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & n_k \\ 0 & \lambda^{n_k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + n_k z_3 \\ \lambda^{n_k} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{n_k} z_1 \\ c_{n_k} z_2 \\ c_{n_k} z_3 \end{bmatrix},$$

es decir,

$$z_1 + n_k z_3 = c_{n_k} z_1, \quad \lambda^{n_k} z_2 = c_{n_k} z_2, \quad z_3 = c_{n_k} z_3$$

para un número infinito de k 's.

Luego, $z_3 = 0$, pues de lo contrario tendríamos $c_{n_k} = 1$, y esto implica $z_1 + n_k z_3 = z_1 \Leftrightarrow n_k z_3 = 0$ lo cual ocurre únicamente cuando $n_k = 0$. Ahora, si $z_2 \neq 0$ obtenemos $\lambda^{n_k} = c_{n_k}$, entonces $z_1 = \lambda^{n_k} z_1$, pero $|\lambda| < 1$, luego $z_1 = 0$, por tanto $[\mathbf{z}] = e_2$. Por último, si $z_2 = 0$ es claro que $[\mathbf{z}] = e_1 \in L_0(g)$.

Por lo tanto $L_0(g) = \{e_1, e_2\}$.

- (ii) Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_1, e_3})$, entonces existe una bola cerrada de radio r , centrada en un x_0 la cual denotamos por $\overline{B}_r(x_0)$, que es compacta y además cumple que $K \subset \overline{B}_r(x_0)$. Así, dado cualquier punto en K , podemos trasladarlo de tal manera que pueda escribirse como $[\mathbf{z}] = [z_1 : z_2 : z_3]$, donde $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1$, $|z_2| \geq \epsilon$ y $|z_3| \geq \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$ fijo. Luego, si $d(g^{-n}[\mathbf{z}], e_2)$ denota la distancia de Fubini-Study entre $g^{-n}[\mathbf{z}]$ y e_2 , entonces

$$\begin{aligned} \cos^2(d(g^{-n}[\mathbf{z}], e_2)) &= \frac{|\lambda^{-n} z_2|^2}{|z_1 - n z_3|^2 + |\lambda^{-n} z_2|^2 + |z_3|^2} \\ &\geq \frac{|\lambda^{-n} z_2|^2}{(n\epsilon + 1)^2 + |\lambda^{-n} z_2|^2 + 1} \\ &\geq \frac{|\lambda|^{-2n} \epsilon^2}{(n\epsilon + 1)^2 + |\lambda|^{-2n} \epsilon^2 + 1}, \end{aligned}$$

y como podemos ver, esta última expresión tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$, además dicha convergencia sólo depende del parámetro ϵ y no del punto $[\mathbf{z}]$ dado. Por lo tanto, $g^{-n}(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e_2$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_1, e_3})$.

- (iii) La prueba es análoga a (ii).
- (iv) Dado que g actúa en la línea invariante $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$ como un elemento loxodrómico de $PGL(2, \mathbb{C})$, con puntos fijos e_1 y e_2 , se deduce que las órbitas de los puntos en $\overleftrightarrow{e_1, e_2} \setminus \{e_1, e_2\}$, se acumulan en e_1 y e_2 .

Tenemos también, que g actúa en la línea $\overleftarrow{e_1, e_3}$ como un elemento parabólico de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ con punto fijo en e_1 , por lo que las órbitas de los puntos en $\overleftarrow{e_1, e_3} \setminus \{e_1\}$ se acumulan en e_1 .

Finalmente, por (ii) y (iii), el conjunto de puntos de la cerradura de las órbitas de puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\overleftarrow{e_1, e_2} \cup \overleftarrow{e_1, e_3})$, es igual a $\{e_1, e_2\}$.

- (v) Por (ii) y (iii), para cualquier conjunto compacto $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\overleftarrow{e_1, e_2} \cup \overleftarrow{e_1, e_3})$, los puntos de la cerradura de la familia de conjuntos compactos $\{g^n(K)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es igual a $\{e_1, e_2\} \subset L_0(g) \cup L_1(g)$. De ello se obtiene, por el lema 2.1 (lema de minimalidad), que $L_2(g) \subset \overleftarrow{e_1, e_2} \cup \overleftarrow{e_1, e_3}$.

Por el contrario, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, el conjunto compacto

$$K_z = \left\{ \left[z + \lambda^n - \frac{1}{n} : 1 : -\frac{z}{n} \right] \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{[z : 1 : 0]\}$$

está contenido en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{e_1, e_2\} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(g) \cup L_1(G))$. Además, como

$$\begin{aligned} g^n \left(\left[z + \lambda^n - \frac{1}{n} : 1 : -\frac{z}{n} \right] \right) &= \left[\lambda^n - \frac{1}{n} : \lambda^n : -\frac{z}{n} \right] \\ &= \left[n\lambda^n - 1 : n\lambda^n : -z \right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} [1 : 0 : z], \end{aligned}$$

se obtiene que $\overleftarrow{e_1, e_3} \subset L_2(g)$.

Similarmente, para cualquier $z \in \mathbb{C}^*$, consideremos el conjunto compacto

$$\{[n : nz : -\lambda^{-n}] \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{e_3\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (L_0(g) \cup L_1(G)).$$

Como

$$g^n([n : nz : -\lambda^{-n}]) = [\lambda^n + 1 : z : -\frac{1}{n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [1 : z : 0]$$

se sigue entonces que $\overleftarrow{e_1, e_2} \subset L_2(g)$.

Por lo tanto $L_2(g) = \overleftarrow{e_1, e_2}$.

- (vi) Si K_z es como en la prueba de (v), entonces $g^n(K_z)$ interseca a cualquier vecindad compacta de $[1 : 0 : z]$ para un número infinito de valores de $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto, la acción del grupo cíclico generado por g en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{e_1, e_2\}$ no es propia y discontinua.

- (vii) Por la observación 2.3, vemos que el conjunto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftrightarrow{e_1, e_2}$ es naturalmente identificado con \mathbb{C}^2 por el mapeo $[z_1 : z_2 : 1] \mapsto (z_1, z_2)$, así que la acción es ahora $g(z_1, z_2) = (z_1 + 1, \lambda z_2)$.

Si para alguna $R > 0$ fija, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ satisface

$$(1) \quad \|(z_1, z_2)\|_1 = |z_1| + |z_2| \leq R,$$

y

$$(2) \quad \|g^n(z_1, z_2)\|_1 = |z_1 + n| + |\lambda^n z_2| \leq R,$$

entonces, $|n| \leq |z_1 + n| + |z_1| \leq 2R$. Así, (1) y (2) se satisfacen para un número finito de valores de $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto el grupo cíclico $\langle g \rangle$ actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftrightarrow{e_1, e_2}$. □

Por las propiedades de conformidad, el conjunto límite de Kulkarni de un subgrupo discreto de $PGL(2, \mathbb{C})$ actuando en \mathbb{C} coincide con el conjunto límite clásico. De hecho, en este caso $L_0 = L_1 = L_2 = \Lambda$. Sin embargo, cuando se trabaja en geometría proyectiva de mayor dimensión, los conjuntos L_0, L_1 y L_2 pueden ser bastante diferentes entre sí. Por otra parte, el conjunto $\Omega(G)$ no siempre es el subconjunto abierto más grande donde la acción es propia y discontinua como se ilustra en el ejemplo 2.1. Sin embargo, cuando G actúa sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ sin puntos fijos y sin líneas invariantes, es posible demostrar que $\Omega(G)$ es el conjunto abierto más grande donde la acción es propia y discontinua (ver [24]).

2.2. $\Lambda(G)$ para subgrupos cíclicos de $PSL(3, \mathbb{C})$

En esta sección proporcionamos los conjuntos límites de Kulkarni, que resultan de los subgrupos cíclicos de $PSL(3, \mathbb{C})$ generados por \mathbf{g} , donde $\mathbf{g} \in SL(3, \mathbb{C})$ está en su forma canónica de Jordan (ver subsección 1.3.1 del capítulo 1). Cabe mencionar que no haremos los cálculos, éstos pueden encontrarse a detalle en [15], un caso de tales subgrupos es el dado en el ejemplo 2.1.

Sea $\mathbf{g} \in SL(3, \mathbb{C})$, denotemos por $g = [[\mathbf{g}]]$ a la transformación proyectiva inducida por \mathbf{g} y por $G = \langle g \rangle$ al subgrupo cíclico de $PSL(3, \mathbb{C})$ generador por g . Entonces dada la forma de \mathbf{g} , la siguiente tabla nos resume los posibles conjuntos límite del grupo G .

Levantamiento en $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$	$L_0(G)$	$L_1(G)$	$L_2(G)$	$\Lambda(G)$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_i = 1$ Con estabilizador finito	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_i = 1$ Con estabilizador infinito	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$	\emptyset	$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_3}$	$\{e_1\}$	$\{e_1\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_3}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{e_1\}$	$\{e_1\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda < 1$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_1, e_3}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_1, e_3}$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_1 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 > \lambda_2 $	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 $	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$ $\{e_1, e_2, e_3\}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \{e_3\}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda = e^{2\pi\theta i} \neq 1$	$\overleftrightarrow{e_1, e_3}, \theta \in \mathbb{Q}$ $\{e_1, e_3\}, \theta \notin \mathbb{Q}$	$\{e_1\}, \theta \in \mathbb{Q}$ $\overleftrightarrow{e_1, e_3}, \theta \notin \mathbb{Q}$	$\{e_1\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_3}$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 $	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_2, e_3}$	$\overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_2, e_3}$

Tabla 2.1: Conjunto límite de Kulkarni.

2.3. Clasificación de Automorfismos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

En esta sección básicamente describiremos a los automorfismos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, éstos pueden verse como elementos no triviales de $PGL(3, \mathbb{C})$, los cuales pueden clasificarse como elípticos, parabólicos o loxodrómicos [25], para mayor detalle puede consultarse la subsección B.2.1 del apéndice B.

- (1) Los elementos *elípticos* en $PGL(3, \mathbb{C})$ son aquellos elementos g que tienen un levantamiento a $GL(3, \mathbb{C})$ cuya forma canónica de Jordan es de la forma

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix}, \text{ donde } \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}.$$

El conjunto límite $\Lambda(g)$ para todo g elíptico es el conjunto \emptyset o bien todo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, esto es de acuerdo a si el orden de g es finito o infinito. Los subgrupos de $PGL(3, \mathbb{C})$ que contienen un elemento elíptico no pueden ser discretos.

- (2) Los elementos *parabólicos* en $PGL(3, \mathbb{C})$ son aquellos elementos g tales que el conjunto límite $\Lambda(g)$ es igual a una única línea compleja. Si g es parabólico entonces tiene un levantamiento a $GL(3, \mathbb{C})$ cuya forma canónica de Jordan es una de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2\pi i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4\pi i\theta} \end{pmatrix}, \text{ con } \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

- En el primer caso $\Lambda(g)$ es la línea compleja que consiste de todos los puntos fijos de g .
- En el segundo caso $\Lambda(g)$ es la única línea compleja g -invariante.
- En el último caso $\Lambda(g)$ es la línea compleja determinada por los dos puntos fijos de g .

- (3) Hay cuatro tipos de elementos *loxodrómicos* en $PGL(3, \mathbb{C})$:

- Las *homotecias complejas* son los elementos de $g \in PGL(3, \mathbb{C})$ que tienen un levantamiento a $GL(3, \mathbb{C})$ cuya forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \neq 1,$$

y su conjunto límite $\Lambda(g)$ es el conjunto de puntos fijos de g , que consiste de una línea l y un punto que no está en l . Por lo tanto, en este caso, $L_0(g) \cup L_1(g) = \Lambda(g)$ no está contenido en una línea.

- Los *tornillos* son los elementos de $g \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ que tienen un levantamiento a $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ cuya forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda\mu)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq \mu, \quad |\lambda| = |\mu| \neq 1,$$

y su conjunto límite $\Lambda(g)$ consiste de una línea l , en la cual g actúa como una transformación elíptica de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ y el punto fijo de g que no está en l . En este caso, $L_0(g) \cup L_1(g) = \Lambda(g)$ no está contenida en una línea.

- Los elementos *loxo-parabólicos* $g \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ tienen un levantamiento a $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ cuya forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \neq 1,$$

y su conjunto límite $\Lambda(g)$ consiste de dos líneas complejas g -invariante. El elemento g actúa en una de estas líneas como un elemento parabólico de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ y en la otra como un elemento loxodrómico de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. En este caso $L_0(g) \cup L_1(g)$ está contenido en una línea.

- Los elementos *fuertemente loxodrómicos* $g \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ tienen un levantamiento a $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ cuya forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}, \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|.$$

Este tipo de transformación tiene tres puntos fijos, uno atractor, otro repulsor y el último, un punto silla. El conjunto límite $\Lambda(g)$ es igual a la unión de la línea compleja determinada por el punto atractor y el punto silla, y de la línea compleja determinada por el punto silla y el punto de repulsor. En este caso $L_0(g) \cup L_1(g)$ consiste de tres puntos en posición general, así $L_0(g) \cup L_1(g)$ no está contenido en una línea.

Observación 2.4 Si $g \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ satisface que $L_0(g) \cup L_1(g)$ está contenido en una sola línea entonces g es una transformación elíptica, parabólica o loxo-parabólica.

Capítulo 3

Grupos elementales con $\Lambda(G) = \ell$

En este capítulo analizaremos a los subgrupos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ que actúan propia y discontinuamente en el complemento de una línea ℓ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, lo cual nos servirá como base para que posteriormente demos una clasificación de los grupos kleinianos complejos elementales, que tienen por conjunto límite de Kulkarni a una línea ℓ . Esta clasificación consta de dos partes, cuando existe un elemento loxo-parabólico en el grupo y cuando no existe. Por último, proporcionaremos algunos ejemplos de cada tipo de grupo, así como también algunos ejemplos de dominios fundamentales débiles.

3.1. Grupos actuando propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$

Sea G un subgrupo de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$, donde $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es una línea. Luego, si ℓ está determinada por los puntos $[\mathbf{p}]$ y $[\mathbf{q}]$, entonces, por el teorema 1.1 (TFGP) existe una única transformación proyectiva $g \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ tal que $g[\mathbf{p}] = e_1$ y $g[\mathbf{q}] = e_2$, así que ℓ puede ser enviada bajo un homeomorfismo a la línea $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$. Por lo tanto, podemos suponer de ahora en adelante que $\ell = \overleftrightarrow{e_1, e_2}$.

Sea G como arriba, para todo $g \in G$ y $e_1, e_2 \in \ell$ se cumple que

$$\begin{aligned} ge_1 &= \begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ f & h & j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \\ c \\ f \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ge_2 &= \begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ f & h & j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b \\ d \\ h \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

luego, como ℓ es G -invariante, se sigue que $f = h = 0$. Además, por la observación 2.3, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ puede ser considerado como \mathbb{C}^2 , así que

$$g[\mathbf{z}] = \begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 + bz_2 + v \\ cz_1 + dz_2 + w \\ j \end{bmatrix} \quad \text{para } [\mathbf{z}] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell.$$

De esta manera, podemos tomar $j = 1$. Por lo tanto, obtenemos que cada elemento $g \in G$ puede ser inducido por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Cuando sea conveniente, escribiremos $a(g), b(g), c(g), \dots$ en lugar de a, b, c, \dots

Usando de nuevo la observación 2.3, y de la matriz 3.1, podemos observar que g puede ser considerado como el automorfismo afín.

$$\mathbf{z} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{v},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

La proyección sobre la parte lineal de la transformación afín dada anteriormente se denota por

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C}), \\ \phi(g) &= \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Observemos que si $g_1, g_2 \in G$, con

$$g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & v_1 \\ c_1 & d_1 & w_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & v_2 \\ c_2 & d_2 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

las igualdades

$$\begin{aligned}\phi(g_1) \cdot \phi(g_2) &= \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}, \\ g_1 \cdot g_2 &= \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 & a_1v_2 + b_1w_2 + v_1 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 & c_1v_2 + d_1w_2 + w_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

implican que $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$, es decir, ϕ es un homomorfismo de grupos.

Sin embargo, la transformación

$$\psi : G \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}), \quad (3.4)$$

$$\psi(g) = \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

no necesariamente es un homomorfismo de grupos, pues las igualdades

$$\psi(g_1) \cdot \psi(g_2) = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1v_2 + v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$\psi(g_1 \cdot g_2) = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1v_2 + b_1w_2 + v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

no siempre coinciden.

Como G actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$, entonces para cada elemento $g \in G$, el grupo cíclico $\langle g \rangle$ actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$, por lo cual se tiene $L_0(g) \cup L_1(g) \subset \ell$. Luego, por la observación anterior, G contiene únicamente elementos elípticos, parabólicos ó loxo-parabólicos.

3.2. G contiene un elemento loxo-parabólico

Lema 3.1 Sea ℓ una línea en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Si G es un subgrupo discreto de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$, y además contiene un elemento loxo-parabólico, entonces existe un conjugado de G tal que cada elemento en este grupo conjugado tiene un representante en $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & v \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

donde a es una raíz de la unidad de orden 1, 2, 3, 4 ó 6. Además, este grupo conjugado actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftrightarrow{e_1, e_2}$.

Demostración: Cada elemento $g \in G$ está representado por una matriz de la forma 3.1 y suponiendo que la matriz que induce un elemento loxo-parabólico, h_0 en G , tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } 0 < |\lambda| < 1, \text{ donde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

El conmutador de h_0^n y de g está dado por

$$g_n = [h_0^n, g] = \begin{pmatrix} \frac{ad - \lambda^{-n}bc}{ad - bc} & \frac{ab(\lambda^{-n} - 1)}{ad - bc} & * \\ \frac{cd(\lambda^n - 1)}{ad - bc} & \frac{ad - \lambda^n bc}{ad - bc} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con inversa igual a

$$g_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ad - \lambda^n bc}{ad - bc} & \frac{-ab(\lambda^{-n} - 1)}{ad - bc} & * \\ \frac{-cd(\lambda^n - 1)}{ad - bc} & \frac{ad - \lambda^{-n}bc}{ad - bc} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que por definición g_n y g_n^{-1} tienen determinante igual a uno, y la sus trazas son iguales a

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{ad - \lambda^{-n}bc}{ad - bc} + \frac{ad - \lambda^n bc}{ad - bc} + \frac{ad - bc}{ad - bc} \\ &= \frac{3ad - bc(\lambda^{-n} + \lambda^n + 1)}{ad - bc} \\ &= \frac{-3ad + bc(1 + \lambda^{-n} + \lambda^n)}{bc - ad}. \end{aligned}$$

Luego, si $bc \neq 0$, por el teorema B.9 del apéndice B, tenemos que para toda n suficientemente grande, $g_n \in G$ es un elemento fuertemente loxodrómico. Por lo tanto, para cada $g \in G$, $b(g) = 0$ ó $c(g) = 0$.

Afirmamos que $b(g) = 0$ para cada $g \in G$ ó que $c(g) = 0$ para cada $g \in G$. En efecto, si suponemos que la afirmación no es cierta, entonces existen g_1, g_2 en G tales que $b(g_1) = c(g_2) = 0$ y $c(g_1) \neq 0$, $b(g_2) \neq 0$. Luego

$$\begin{aligned} g_1 \cdot g_2 &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & v_1 \\ c_1 & d_1 & w_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & v_2 \\ 0 & d_2 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 & a_1 v_2 + v_1 \\ c_1 a_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 & c_1 v_2 + d_1 w_2 + w_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

implica que $a_1b_2 = 0$ ó $c_1a_2 = 0$, lo cual contradice el hecho de que $c(g_1) \neq 0$ y $b(g_2) \neq 0$. De esta forma, podemos suponer conjungando si es necesario, que $c(g) = 0$ para cada $g \in G$.

Si $g \in G$ satisface que $a(g) = 1$, entonces, por el lema C.7 del apéndice C, g conmuta con h_0 . De esta manera, como

$$\begin{aligned} g \cdot h_0 &= \begin{pmatrix} 1 & b & v \\ 0 & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda b & 1+v \\ 0 & \lambda d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h_0 \cdot g &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & v \\ 0 & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b & 1+v \\ 0 & \lambda d & \lambda w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obtenemos que $\lambda b = b$ y que $\lambda w = w$, esto implica que $b = 0 = w$. Luego para cada h en el subgrupo $H = \{g \in G : a(g) = 1\}$, uno tiene que $b(h) = w(h) = 0$, y dado que $a(ghg^{-1}) = 1$ para toda $h \in H, g \in G$, se sigue que H es normal de G .

Ahora, sea g un elemento arbitrario en G , entonces

$$\begin{aligned} gh_0g^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b & v \\ 0 & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -\frac{b}{ad} & \frac{bw-vd}{ad} \\ 0 & d^{-1} & -\frac{w}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{b(-1+\lambda)}{d\lambda} & a - \frac{d+bw(-1+\lambda)}{d} \\ 0 & d & w - w\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H, \end{aligned}$$

así que $\frac{b(-1+\lambda)}{d\lambda} = 0 = w - w\lambda$. Por lo tanto $b = 0 = w$.

La línea $\overleftrightarrow{e_1, e_3}$ es G -invariante pues $b(g) = c(g) = w(g) = 0$, esto es

$$\begin{pmatrix} a & 0 & v \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 + vz_3 \\ 0 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Además, G actúa sobre esta línea como un grupo elemental clásico con punto límite e_1 . De hecho, la acción de G sobre esta línea es la acción en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ del grupo

$$\psi(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a(g) & v(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : g \in G \right\},$$

donde ψ se define como en 3.4. Se sigue por hechos bien conocidos sobre los grupos Euclidianos, que $a(g)$ es una raíz de la unidad de orden 1, 2, 3, 4 ó 6 (ver pág. 92 de [20]). \square

El siguiente resultado es de suma importancia, ya que nos garantiza que si G es como en el lema anterior, entonces G es un grupo abeliano de rango a lo más dos. Este resultado se menciona de manera más precisa en la siguiente proposición.

Proposición 3.1 Si $G \leq \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ actúa propia y discontinuamente sobre el complemento de la línea $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, y G contiene un elemento loxo-parabólico, entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_0}$ ó a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_0}$ para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$.

Demostración: Antes de probar esta proposición, veamos los siguientes dos lemas que nos servirán para concluir con este resultado.

Lema 3.2 Si $G \leq \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ actúa propia y discontinuamente sobre el complemento de la línea $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, y G contiene un elemento loxo-parabólico, entonces G contiene un subgrupo normal abeliano H isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_0}$ ó a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_0}$ para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$. Además, el índice de H en G sólo puede ser igual a 1, 2, 3, 4 ó 6.

Demostración: Podemos suponer que cada elemento de G es inducido por una matriz de la forma 3.5. En este caso la transformación $\psi : G \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C})$, definida como en 3.4 satisface que

$$\begin{aligned} \psi(g_1) \cdot \psi(g_2) &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 v_2 + v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \psi(g_1 \cdot g_2) &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 v_2 + v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

para toda g_1, g_2 en G . Por lo tanto, ψ es un homomorfismo y su imagen es un grupo Euclidiano de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. El kernel de este homomorfismo consiste de todas aquellas transformaciones en G inducidas por una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así que estas transformaciones son necesariamente elípticas o la identidad. De esta manera, $Ker(\psi)$ es discreto y cada elemento en el tiene orden finito, esto implica que $Ker(\psi)$ es un grupo finito (ver proposición B.2 del apéndice B). Además, es un grupo cíclico para algún orden n_0 . Denotemos por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al generador de $Ker(\psi)$.

Sea H el subgrupo normal abeliano de G que consiste de todos los elementos $g \in G$ que son inducidos por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Nótese que por el primer teorema de isomorfismo, $G/Ker(\psi) \cong Im(\psi)$. Luego, si el rango de $Ker(\psi)$ es igual a n , entonces cada elemento en $H/Ker(\psi)$ tiene un representante de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & dd_0^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Así, $H/Ker(\psi)$ es un subgrupo abeliano libre del grupo euclidiano $G/Ker(\psi)$, que consiste de todos los elementos parabólicos. Más aún, $H/Ker(\psi)$ tiene rango igual a uno o dos.

Por el tercer teorema de isomorfismo, tenemos que

$$G/Ker(\psi)/H/Ker(\psi) \cong G/H,$$

y como $H/Ker(\psi)$ tiene índice igual a 1, 2, 3, 4 ó 6 en $G/Ker(\psi)$, se sigue entonces que H tiene índice igual 1, 2, 3, 4 ó 6 en G .

□

Lema 3.3 Sea $G \leq \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ un grupo que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$. Si G contiene un elemento loxo-parabólico, entonces, $a(g) = 1$ para toda $g \in G$ y en consecuencia $H = G$ (donde H es como en el lema 3.2).

Demostración: Supongamos que la matriz que induce un elemento loxo-parabólico en G , está dada por

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Procedamos por contradicción y supongamos existe $g \in G$ tal que $a(g) \neq 1$, con

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 & v \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera obtenemos que para toda $m \in \mathbb{N}$,

$$f_m = g^m h_0 g^{-m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^m \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, como a es una raíz de la unidad de orden 1, 2, 3, 4 ó 6 (ver lema 3.1), podemos suponer, sin pérdida de generalidad que a es de orden n , con $n \in \{2, 3, 4, 6\}$. Por tanto, para f_n se cumple que $a^n = 1$.

Luego, como

$$(a - 1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) = a^n - 1 = 0,$$

obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = 0.$$

Así,

$$h_0 \prod_{j=1}^{n-1} f_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} a^k \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta ser una homotecia, lo cual contradice el hecho de que G contiene únicamente, elementos elípticos, parabólicos o loxo-parabólicos (ver observación 2.4). Por lo tanto, $a(g) = 1$ para todo g en G y además, como los elementos de H son inducidos por una matriz de la forma 3.6, se sigue entonces que $H = G$. □

Como habíamos mencionamos, de los lemas 3.2 y 3.3 obtenemos que $H = G$, y entonces H no tiene índice igual a 2, 3, 4 ó 6, es decir, G es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_0}$ o a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_0}$ para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la proposición 3.1 queda demostrada. □

Acontinuación enunciaremos dos lemas, los cuales nos dirán como es el conjunto límite de G según si su rango es igual a uno ó a dos. De esta manera, tenemos lo siguiente:

Lema 3.4 Sea $G \leq \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ un grupo que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$. Si G contiene un elemento loxo-parabólico y además tiene rango igual a uno, entonces $L_0(G) = L_1(G)$ consiste de dos puntos en ℓ y $L_2(G)$ es igual a la unión de ℓ y otra línea más. En particular, el conjunto límite de Kulkarni de G es igual a la unión de dos líneas.

Demostración: Sea ψ como en 3.4. Como $G/\text{Ker}(\psi) \cong \text{Im}(\psi)$ (primer teorema de isomorfismos), entonces podemos suponer que G es generado por los dos elementos inducidos por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $0 < |\lambda| < 1$ y d_0 es una n_0 -ésima raíz de la unidad.

El subgrupo N_1 de G , generado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < |\lambda| < 1,$$

es normal y de índice finito en G . Por otro lado, del ejemplo 2.1, tenemos que $L_0(N_1) = L_1(N_1) = \{e_1, e_2\}$ y $L_2(N_1) = \overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_1, e_3}$.

Por lo tanto, por la proposición 2.3, se sigue que

$$\begin{aligned} L_0(N_1) &= L_0(G) &= \{e_1, e_2\}, \\ L_1(N_1) &= L_1(G) &= \{e_1, e_2\}, \\ L_2(N_1) &= L_2(G) &= \overleftrightarrow{e_1, e_2} \cup \overleftrightarrow{e_1, e_3}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.5 Sea $G \leq \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ un grupo que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$. Si G contiene un elemento loxo-parabólico y además tiene rango igual a dos, entonces $L_0(G) \cup L_1(G) = \ell$, y $L_2(G) \subset \ell$. En particular, el conjunto límite de Kulkarni de G es igual a ℓ .

Demostración: Podemos suponer que las dos transformaciones inducidas por

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < |\lambda| < 1, \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{C}^*,$$

generan un subgrupo N_2 normal y de índice finito en el grupo abeliano G . Por lo tanto, de la proposición 2.3, obtenemos que

$$\begin{aligned} L_0(N_2) &= L_0(G), \\ L_1(N_2) &= L_1(G), \\ L_2(N_2) &= L_2(G). \end{aligned}$$

Así, $L_0(G) \cup L_1(G) = \ell$ siempre que $L_0(N_2) \cup L_1(N_2) = \ell$.

Ahora consideremos todos los casos posibles:

1. Si $|\delta| = 1$, digamos $\delta = e^{2i\pi\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $L_0(\gamma_2) = \ell$, siempre que $\theta \in \mathbb{Q}$ o $L_1(\gamma_2) = \ell$, siempre que $\theta \notin \mathbb{Q}$. En cualquier caso $L_0(N_2) \cup L_1(N_2) = \ell$ (ver tabla 2.2).
2. Si $|\delta| \neq 1$, entonces hay dos casos dependiendo si $\log|\lambda|$ y $\log|\delta|$ son racionalmente independientes o no.
 - En el primer caso, la acción de N_2 en ℓ no es discreta. Por lo tanto $L_0(N_2) \cup L_1(N_2) = \ell$.
 - En el segundo caso, existe un elemento $\gamma \in N_2$ tal que $L_0(\gamma) \cup L_1(\gamma) = \ell$. Así, $L_0(N_2) \cup L_1(N_2) = \ell$.

Como G actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ y $L_0(G) \cup L_1(G) = \ell$, se sigue por el lema 2.1 (lema de minimalidad) que $L_2(G) \subset \ell$. □

3.2.1. Ejemplos de grupos que contienen loxo-parabólicos

Ejemplo 3.1 En los siguientes ejemplos d , v y λ son un números complejos fijos con $d \neq 0$, $\text{Im}(v) \neq 0$ y $0 < |\lambda| < 1$.

- (i) Sea θ un número real fijo. El grupo abeliano G_1 , generado por las transformaciones proyectivas

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftrightarrow{e_1, e_2}$. Para verificar esta afirmación, usaremos el mismo procedimiento dado en el inciso (vii) del ejemplo 2.1. En efecto, observemos que cualquier elemento en G_1 es de la forma

$$g_1^m \cdot g_2^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m + vn \\ 0 & \lambda^m d^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}.$$

El conjunto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$ es naturalmente indentificado con \mathbb{C}^2 por el mapeo

$$[z_1 : z_2 : 1] \mapsto (z_1, z_2),$$

de esta manera, las acciones quedan determinadas como

$$\begin{aligned} g_1(z_1, z_2) &= (z_1 + 1, \lambda z_2), \\ g_2(z_1, z_2) &= (z_1 + v, d z_2). \end{aligned}$$

Si para alguna $R > 0$ fija, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ satisface que

$$\|(z_1, z_2)\|_1 = |z_1| + |z_2| \leq R \quad (3.7)$$

y

$$\|g_1^m \cdot g_2^n(z_1, z_2)\|_1 = |z_1 + m + vn| + |\lambda^m d^n z_2| \leq R, \quad (3.8)$$

entonces,

$$\begin{aligned} 2R &\geq |z_1| + |z_1 + m + vn| \\ &= |-z_1| + |z_1 + m + vn| \\ &\geq |-z_1 + z_1 + m + vn| \\ &= |m + vn| \\ &= |(m + n\operatorname{Re}(v)) + in\operatorname{Im}(v)|, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$2R \geq |m + n\operatorname{Re}(v)|$$

y

$$2R \geq |n\operatorname{Im}(v)|.$$

Así, analizando los posibles valores de $m, n \in \mathbb{Z}$, se sigue que las igualdades 3.7 y 3.8 se satisfacen para un número finito de valores de m y n . Por lo tanto, el grupo abeliano $\langle g_1, g_2 \rangle$ actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$.

Entonces, por el lema 3.5, $\Lambda(G_1) = \overleftarrow{e_1, e_2}$.

- (ii) Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ un número fijo. El grupo abeliano G_2 , generado por las transformaciones proyectivas

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & e^{2\pi i \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{n_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una extensión finita del grupo G_1 , pues g_3 es un elemento de orden finito. Por lo tanto, de la proposición 2.1, obtenemos que $\Lambda(G_2) = \overleftarrow{e_1, e_2}$.

Observemos que no siempre que agreguemos un nuevo elemento de orden finito a un grupo dado, el nuevo grupo será una extensión finita del original, esto se debe a que el nuevo grupo tiene que ser abeliano, y esto último no siempre sucede.

En nuestro caso, otra manera de comprobar que un grupo G' no es una extensión finita de otro grupo G dado, es verificando que $\Lambda(G') \neq \Lambda(G)$, esto último se justifica utilizando la contrareciproca del corolario 2.1.

3.3. G no contiene elementos loxo-parabólicos

Lema 3.6 Sea G un subgrupo de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ actuando propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$. Si G no contiene elementos loxo-parabólicos y $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$, entonces $L_2(G) = \ell$.

Demostración: Por hipótesis tenemos que $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$, luego si definimos a $\phi(G)$ como en 3.3, es decir,

$$\phi : G \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}),$$

$$\text{con } \phi(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

obtenemos que el grupo $\phi(G)$ tiene por conjunto límite a un subconjunto de $L_0(G) \cup L_1(G)$, por lo cual dicho grupo es un grupo kleiniano clásico y además sólo contiene elementos elípticos o parabólicos (ya que de lo contrario, si $\phi(G)$ tuviera un elemento loxodrómico, entonces G tendría un elemento loxodrómico, lo cual es una contradicción). Así, dado que $\phi(G)$ consiste sólo de elementos elípticos y parabólicos, $\phi(G)$ actúa como un grupo elemental en ℓ . Por lo tanto este grupo tiene un punto fijo en ℓ (ver pág. 91 de [20]).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el punto fijo es e_1 , esto último implica que

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ c & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

de lo cual se sigue que $c = 0$.

Así, cada elemento en G puede ser representado por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ 0 & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

De esta manera, el kernel del homomorfismo $\phi : G \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ consiste de todas las transformaciones en G inducidas por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & v \\ 0 & a & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, como hay diferentes tipos de elementos parabólicos (ver tabla 2.2) y además $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$, se sigue que cada elemento parabólico de orden infinito en G tiene forma canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior obtenemos que cada elemento en $\text{Ker}(\phi)$ es elíptico y por tanto finito, así $\text{Ker}(\phi)$ es finito (ver proposición B.2 del apéndice B). Además, es cíclico pues es isomorfo a un subgrupo finito de \mathbb{S}^1 . Este isomorfismo está inducido por el siguiente monomorfismo

$$\begin{aligned} \rho : \text{Ker}(\phi) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ \begin{pmatrix} a & 0 & v \\ 0 & a & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto a. \end{aligned}$$

Para demostrarlo es suficiente ver lo siguiente.

$$a) \begin{pmatrix} a_1 & 0 & v_1 \\ 0 & a_1 & w_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 & v_2 \\ 0 & a_2 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 & a_1 v_2 + v_1 \\ 0 & a_1 a_2 & a_1 w_2 + w_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b) El kernel de ρ sólo consta de la matriz identidad.

Lema 3.7 Sea G un subgrupo de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ actuando propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$. Si G no contiene elementos loxo-parabólicos y $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$, entonces la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

induce el único límite pseudo-proyectivo del grupo G , también denotado por Q . En consecuencia, $L_2(G) \subset \ell$.

Demostración: Sea (g_n) una subsucesión de elementos distintos en G tal que, $g_n \rightarrow R$ cuando $n \rightarrow \infty$ (donde R es una transformación pseudo-proyectiva).

Dado que G sólo contiene elementos parabólicos y elípticos, obtenemos los siguientes dos casos.

Caso 1. La sucesión contiene una subsucesión la cual consiste únicamente de elementos parabólicos.

En este caso, podemos suponer que los elementos son inducidos por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{Z},$$

pero el conjunto de todas estas transformaciones están en G (ver matriz 3.9) y forman un subgrupo de G , además el conmutador de cualesquiera dos elementos g_s y g_t con,

$$g_s = \begin{pmatrix} 1 & b_s & v_s \\ 0 & 1 & w_s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_t = \begin{pmatrix} 1 & b_t & v_t \\ 0 & 1 & w_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donde } s, t \in \mathbb{Z},$$

está dado por

$$[g_s, g_t] = g_s g_t g_s^{-1} g_t^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -w_s b_t + b_s w_t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y este a su vez es igual a la identidad o a un elemento parabólico que tiene una línea de puntos fijos, pero, dado que el grupo G no contiene estos últimos elementos, el conmutador es igual a la identidad, por lo tanto dicho subgrupo es abeliano. Por otra parte, la restricción del homomorfismo ϕ a este subgrupo abeliano, es decir

$$\phi : G \longrightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C}),$$

$$\text{con } \phi(g_n) = \begin{pmatrix} 1 & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_n = \begin{pmatrix} 1 & b_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

es un isomorfismo sobre el subgrupo parabólico del grupo euclidiano $\{A(g) : g \in G\}$. Por lo tanto, este subgrupo abeliano libre tiene rango a lo más 2.

En efecto, si el grupo tiene rango uno, podemos suponer que este grupo está generado por un elemento de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

esto se debe, a que dado cualquier elemento g_n del grupo con $b_n, c_n \neq 0$, podemos conjugarlo por una matriz T triangular superior y llegar a la matriz propuesta anteriormente, veamos

$$\begin{aligned}
Tg_nT^{-1} &= \begin{pmatrix} b_n w_n & 0 & 0 \\ 0 & w_n & \frac{-v_n}{b_n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b_n w_n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_n} & \frac{v_n}{b_n w_n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m &= \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-m} &= \begin{pmatrix} 1 & -m & \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces, tomando el límite pseudo-proyectivo tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y análogamente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto el límite pseudo-proyectivo R es inducido por la matriz Q .

Ahora si el rango es igual a dos, entonces podemos suponer (conjugando por una matriz triangular superior) que el grupo parabólico es generado por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & v \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Observemos que B es de esa forma, pues si tomamos un elemento

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & \beta & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

éste debe conmutar con A . Así que de

$$AB' = \begin{pmatrix} 1 & \beta + 1 & v + w \\ 0 & 1 & w + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B'A = \begin{pmatrix} 1 & \beta + 1 & v + \beta \\ 0 & 1 & w + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos que $w = \beta$, por lo cual $B = B'$. Por otra parte, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pues el grupo es discreto.

Luego,

$$A^m B^n = \begin{pmatrix} 1 & \beta n + m & \frac{1}{2}\beta^2 n^2 - \frac{1}{2}\beta^2 n + vn + m\beta n + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m \\ 0 & 1 & \beta n + m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \beta n + m & \frac{1}{2}(\beta n + m)^2 - n(\frac{1}{2}\beta^2 - v) - \frac{1}{2}m \\ 0 & 1 & \beta n + m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

y pseudo-proyectivamente

$$A^m B^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\beta n + m)^2} & \frac{1}{(\beta n + m)} & \frac{1}{2} - \frac{n(\beta^2 - 2v)}{2(\beta n + m)^2} - \frac{m}{2(\beta n + m)^2} \\ 0 & \frac{1}{(\beta n + m)^2} & \frac{1}{(\beta n + m)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\beta n + m)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Consideremos los siguientes casos:

Caso (i): Cuando m ó n es fija.

- Si m es fija, de la matriz 3.10 tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^m B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Análogamente, si n es fija de la misma matriz obtenemos,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A^m B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso (ii): Cuando m y n no son fijas.

Antes de continuar con este caso, veamos los siguiente.

$$n\beta + m = (n\operatorname{Re}(\beta) + m) + in\operatorname{Im}(\beta),$$

entonces

$$\begin{aligned} \|n\beta + m\|^2 &= (n\operatorname{Re}(\beta) + m)^2 + (n\operatorname{Im}(\beta))^2 \\ &= (n\operatorname{Re}(\beta))^2 + 2nm\operatorname{Re}(\beta) + m^2 + (n\operatorname{Im}(\beta))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Luego si $n, m \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\begin{aligned} |m/2| &\leq |m|, \\ |m^2| &\leq \|n\beta + m\|^2, \\ \|n\operatorname{Im}(\beta)\| &\leq \|n\beta + m\|, \\ \|n(\beta^2 - 2v)/2\| &\leq 1 + \|n(\beta^2 - 2v)/2\|, \end{aligned}$$

lo cual implica para $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ que

$$\frac{|m/2|}{\|n\beta + m\|^2} \leq \frac{|m|}{|m^2|} = \frac{1}{|m|}, \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\|n\beta + m\|} \leq \frac{1}{\|n\operatorname{Im}(\beta)\|} = \frac{1}{|n|\|\operatorname{Im}(\beta)\|}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\|n(\beta^2 - 2v)/2\|}{\|n\beta + m\|^2} \leq \frac{1 + \|n(\beta^2 - 2v)/2\|}{\|n\operatorname{Im}(\beta)\|^2} = \frac{1 + |n|\|(\beta^2 - 2v)/2\|}{|n|^2\|\operatorname{Im}(\beta)\|^2}. \quad (3.14)$$

De esta manera, analizamos los siguientes subcasos.

- Si m y n tiende a ∞ .

Usando las desigualdades 3.13, 3.14, 3.14 obtenemos que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|n\beta + m\|} \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{|n|\|\operatorname{Im}(\beta)\|} = 0, \quad (3.15)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|(n\beta + m)^2\|} \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{|n|^2\|\operatorname{Im}(\beta)\|^2} = 0, \quad (3.16)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\|m\|}{\|2(n\beta + m)^2\|} \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{|m|} = 0, \quad (3.17)$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{\|n(\beta^2 - 2v)\|}{\|2(n\beta + m)^2\|} \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1 + |n|\|(\beta^2 - 2v)/2\|}{|n|^2\|\operatorname{Im}(\beta)\|^2} = 0, \quad (3.18)$$

así,

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\beta + m} = 0, \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n\beta + m)^2} = 0, \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{m}{2(n\beta + m)^2} = 0$$

y

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{n(\beta^2 - 2v)}{2(n\beta + m)^2} = 0.$$

Por lo tanto, de la matriz 3.11 se sigue que

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} A^n B^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si m y n tienden a $-\infty$.

Observemos que si m y n tienden a menos infinito, las desigualdades 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18 no cambiarán en nada. Esto último se debe a que los límites involucrados en dichas desigualdades, son límites en terminos de normas y valores absolutos. Por lo tanto

$$\lim_{m,n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n\beta + m} = 0, \quad \lim_{m,n \rightarrow -\infty} \frac{1}{(n\beta + m)^2} = 0, \quad \lim_{m,n \rightarrow -\infty} \frac{m}{2(n\beta + m)^2} = 0$$

y

$$\lim_{n,m \rightarrow -\infty} \frac{n(\beta^2 - 2v)}{2(n\beta + m)^2} = 0.$$

Así de la matriz 3.11, obtenemos que

$$\lim_{n,m \rightarrow -\infty} A^n B^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si m y n tienden en sentidos opuestos.
 - a) Si $m \rightarrow \infty$ y $n \rightarrow -\infty$.
 - b) Si $m \rightarrow -\infty$ y $n \rightarrow \infty$.

Un argumento similar al caso anterior nos muestra que para ambos incisos, usando la matriz 3.11, el límite de $A^m B^n$ seguirá siendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, en cualquier caso el límite pseudo-proyectivo R es inducido por la matriz Q .

Caso 2. La sucesión (g_n) consiste (excepto para un número finito de valores de n) de elementos elípticos.

Ahora, dado que $G/Ker(\phi)$ es un grupo euclidiano, se sigue que cada elemento elíptico g en G es de orden finito, es decir, $g^{m_g} = Id$ con $m_g \in \mathbb{N}$, luego entonces, existe m_0 tal que para todo g dado de la misma forma se satisface que $g^{m_0} = Id$, por lo tanto $g^{m_0} \in Ker(\phi)$. Por otra parte como $Ker(\phi)$ es finito y cíclico, existe un $n_0 = k_0 m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada elemento elíptico en G , $g^{n_0} = Id$ donde k_0 es el orden de $Ker(\phi)$. De esta forma, existe una subsucesión de (g_n) también denotada (g_n) , y una matriz diagonal h , tal que $(h^{-1}g_n)$ es una sucesión de elementos parabólicos distintos (pues esas transformaciones son representadas por una matriz triangular superior con unos en la diagonal). Por el caso 1 anterior, se sigue que el límite pseudo-proyectivo de $h^{-1}g_n$ es inducido por la matriz Q . Por lo tanto, el límite pseudo-proyectivo de la sucesión g_n es inducido por la misma matriz. □

Finalmente probemos que $L_2(G) = \ell$.

a) $L_2(G) \subset \ell$.

Sea $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ un compacto y $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de G . Entonces por el lema anterior $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión denotada igual, tal que $g_n \rightarrow Q$ uniformemente en compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus Ker(Q) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ cuando $n \rightarrow \infty$, esto implica que el único punto de acumulación de $\{g_n(K)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es e_1 , donde $e_1 \subset L_0(G) \cup L_1(G)$. Entonces por el lema 2.1 (lema de minimalidad) $L_2(G) \subset \ell$.

b) $\ell \subset L_2(G)$.

Sea ℓ_0 una línea que no intersecta a $L_0(G) \cup L_1(G)$ y sea $g \in G$ un elemento parabólico. Luego, como $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$, se sigue que g está inducido por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero la familia de conjuntos compactos $\{g^n(\ell_0)\}$ se acumula en ℓ (ver tabla 2.2). Por lo tanto, $\ell \subset L_2(G)$.

De esta manera, $\ell = L_2(G)$. □

Teorema 3.1 Sea $G \leq \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ un grupo infinito que actúa propia y discontinuamente en el complemento de la línea $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

(i) Si G contiene un elemento loxo-parabólico entonces

- El conjunto límite de Kulkarni $\Lambda(G)$ es igual a la unión de ℓ y otra línea, siempre y cuando G sea un grupo cíclico generado por un elemento loxo-parabólico.
- El conjunto límite $\Lambda(G)$ es igual a ℓ , siempre y cuando G sea un grupo abeliano libre y de rango dos generado por un elemento loxo-parabólico y otro elemento, que puede ser loxo-parabólico o parabólico.

(ii) Si G no contiene un elemento loxo-parabólico, entonces $\Lambda(G) = \ell$.

Demostración: La prueba de *i*) se sigue de los lemas 3.4 y 3.5.

Ahora para *ii*), tenemos que el grupo G contiene un elemento parabólico de orden infinito y puesto que G actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{\ell\}$, se sigue que $L_0(G) \cup L_1(G) \subset \ell$. Por tanto, consideraremos dos casos, cuando $L_0(G) \cup L_1(G) = \ell$ y cuando $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$.

Caso 1: $L_0(G) \cup L_1(G) = \ell$.

Sea $K \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ un compacto, entonces por definición, los puntos de acumulación de la familia de conjuntos compactos $\{g(K)\}_{g \in G}$ están contenidos en $\ell = L_0(G) \cup L_1(G)$. Luego, por el lema 2.1 (lema de minimalidad) $L_2(G) \subset \ell$.

Caso 2: Si $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$, entonces por el lema 3.6, $L_2(G) = \ell$.

□

Corolario 3.1 Si $G \leq \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y G no contiene elementos loxo-parabólicos, entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones se cumple.

- (1) $L_0(G) \cup L_1(G) = \ell$ y $L_2(G) \subset \ell$ ó
- (2) $L_0(G) = L_1(G)$ es un punto en ℓ y $L_2(G) = \ell$.

Demostración: Usando la demostración del inciso *ii*) del teorema 3.1, es suficiente probar que si $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$ entonces $L_0(G) = L_1(G) = \{p\}$, donde $p \in \ell$.

En efecto, si $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq \ell$, se sigue que los únicos elementos que tienen grupo de isotopía infinito en G , son los elementos parabólicos de orden infinito que son inducidos por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma $L_0(G) = \{e_1\}$ (ver tabla 2.2).

Por otra parte, sea $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ y $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de G . Entonces por el lema 3.7 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión denotada igual, tal que $g_n \rightarrow Q$ uniformemente en compactos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Ker}(Q) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ cuando $n \rightarrow \infty$, esto implica que el único punto de acumulación de $\{g_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es e_1 , por lo tanto $L_2(G) = \{e_1\}$.

Así, $L_1(G) = L_2(G) = \{e_1\}$, i.e., $p = e_1$. □

Proposición 3.2 Si $G \subset \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ es un subgrupo discreto tal que $\Lambda(G)$ es igual a una línea ℓ , G no contiene elementos loxo-parabólicos y G contiene un elemento que actúa como un elemento parabólico en ℓ , entonces G es conjugado en $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ a algún grupo tal que cada elemento en éste es inducido por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ 0 & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |a| = |d| = 1. \quad (3.19)$$

(Si el grupo G contiene elementos loxo-parabólicos, entonces el enunciado es también válido con la excepción que los valores propios no son números complejos unitarios. Ver lema 3.1)

Demostración: Como el conjunto $\phi(G)$ contiene un elemento parabólico, podemos suponer (conjugando por un elemento que preserva la línea ℓ) que tal elemento parabólico es inducido por una matriz de la forma

$$A_1 = \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para alguna } \mu \in \mathbb{C}.$$

Si suponemos que existe una matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{tal que } c \neq 0,$$

el cual es inducido por un elemento en $\phi(G)$, entonces $\text{Tr}^2(A_1^n A_2 A_1^{-n} A_2^{-1}) = (2 + (cn)^2)^2$. Así, $A_1^n A_2 A_1^{-n} A_2^{-1}$ es un elemento loxodrómico para una n lo suficientemente grande, y esto contradice que $\phi(G)$ contiene únicamente elementos elípticos o parabólicos. □

Lema 3.8 Sea V un subgrupo abeliano de $(\mathbb{C}^2, +)$ de rango $r = 1, 2, 3$ ó 4 y u una raíz m -ésima de la unidad que genera un grupo cíclico de orden m . Supongamos que $uv \in V$ siempre que $v \in V$, entonces $\varphi(m) \leq r$ (donde φ denota la función de Euler). Por lo tanto, $m \leq 12$.

Demostración: Esta prueba está contenida en la prueba del teorema C.1 del apéndice C, y para ser autocontenido la incluimos. Sea v_1, \dots, v_r una base de V . Expresando uv_i en términos de esta base y tomando un determinante, obtenemos un polinomio de grado r con coeficientes enteros el cual u satisface. Por lo tanto el anillo generado por u sobre los racionales es una extensión de grado a lo más r . Este anillo es generado por una raíz primitiva m -ésima de la unidad y es una extensión de grado $\varphi(m)$, donde φ es la función de Euler. Así $\varphi(m) \leq r$, de lo cual se sigue que $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ ó 12 . \square

Lema 3.9 Sea $u \in \mathbb{S}^1$, si u es raíz del polinomio complejo mónico $f(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, entonces u es raíz de la unidad.

Demostración: Por hipótesis u es de la forma $u = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Por otra parte, tenemos también que \bar{u} es una raíz de $f(z)$. Entonces, suponiendo que b es la tercera raíz obtenemos que

$$\begin{aligned} z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 &= (z - u)(z - \bar{u})(z - b) \\ &= (z^2 - (u + \bar{u})z + 1)(z - b) \\ &= z^3 - (u + \bar{u})z^2 + z - bz^2 + b(u + \bar{u})z - b \\ &= z^3 - (u + \bar{u} + b)z^2 + (1 + b(u + \bar{u}))z - b. \end{aligned}$$

De esta forma $a_2 = -(u + \bar{u} + b)$, $a_1 = 1 + b(u + \bar{u})$ y $a_0 = -b$, así que $u + \bar{u} = a_0 - a_2 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, como $u + \bar{u} = 2 \cos \theta$, la ecuación

$$|2 \cos \theta| \leq 2$$

implica que $2 \cos \theta$ puede tomar uno de los valores siguientes: $0, \pm 1, \pm 2$. Para cada valor tenemos lo siguiente.

Sea $p(z) = z^2 + (u + \bar{u})z + 1$, donde $u + \bar{u} = 2 \cos \theta$. Entonces:

(1) Si $2 \cos \theta = 0$, el polinomio $p(z) = z^2 + 1$ tiene raíces $z_1 = i$ y $z_2 = -i$.

(2) Cuando $2 \cos \theta = \pm 1$, obtenemos los siguientes subcasos:

(a) Si $2 \cos \theta = 1$, $p(z) = z^2 + z + 1$ tiene raíces $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$.

(b) Si $2 \cos \theta = -1$, $p(z) = z^2 - z + 1$ tiene raíces $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ y $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$.

(3) Análogamente, para $2 \cos \theta = \pm 2$, el polinomio $p(z) = z^2 \pm 2z + 1$ tiene raíces:

$$\blacksquare \quad z_1 = z_2 = -1 \quad \text{si} \quad 2 \cos \theta = 2,$$

$$\blacksquare \text{ ó } z_1 = z_2 = 1 \text{ si } 2 \cos \theta = -2.$$

Por otro lado, observemos que

$$u^2 - (u + \bar{u})u + 1 = u^2 - u^2 - |u| + 1 = 0,$$

es decir, u es raíz del polinomio mónico $p(z)$. Por lo tanto, como las raíces de $p(z)$ son únicas, se sigue que u es igual a una de las siguientes raíces $\{1, e^{\frac{\pi i}{3}}, i, e^{\frac{2\pi i}{3}}, -1\}$. Así, u es una raíz de la unidad. □

Las hipótesis del lema 3.8 pueden ser modificadas a fin de obtener lo siguiente.

Lema 3.10 Sea V un subgrupo abeliano de $(\mathbb{C}^2, +)$ de rango $r = 1, 2, 3$ y $u \in \mathbb{S}^1$. Supongamos que $uv \in V$ siempre que $v \in V$, entonces u es una raíz de la unidad de orden 1, 2, 3, 4 ó 6.

Demostración: La prueba es parecida a la del lema 3.8 y se sigue del lema 3.9, pues justamente usamos el hecho de que $u \in \mathbb{S}^1$ es una raíz de la unidad, donde existe un polinomio mónico de grado $r \leq 3$ con coeficientes enteros el cual u satisface. □

Observación 3.1 Los lemas 3.8 y 3.10 pueden ser aplicados a subgrupos abelianos de

$$(\mathbb{C}, +) \cong (\{0\} \times \mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{C} \times \{0\}, +).$$

Si suponemos que cada elemento en G puede ser representado por una matriz triangular superior de la forma (3.19) y G contiene un elemento elipto-parabólico irracional entonces podemos suponer que es inducido por una de las siguientes dos matrices triangulares superiores:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_0 = d_0 = e^{2\pi i \theta}, \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Proposición 3.3 Sea G un subgrupo discreto de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ tal que cada elemento puede ser inducido por una matriz de la forma (3.19) y $\Lambda(G) = \ell$. Si G contiene el elemento elipto-parabólico irracional inducido por E_1 , entonces el subgrupo normal, N_1 , consiste de los elementos de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & v \\ 0 & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es un (finitamente generado) subgrupo abeliano de índice finito. De hecho, $b = w = 0$ para cada elemento en N_1 .

Demostración: Cada elemento en el subgrupo N_1 conmuta con E_1 (por el lema C.7 del apéndice C), por lo tanto tiene la forma

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v(h) \\ 0 & d(h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

De esta forma, N_1 es un subgrupo abeliano generado finitamente. Además, el conjunto $V = \{v \in \mathbb{C} : \exists h \in N_1 \text{ con } v(h) = v\}$ es un subgrupo abeliano de $(\mathbb{C}, +)$.

Ahora, sea g un elemento en G . Considerando la entrada superior derecha de ghg^{-1} , es posible verificar que $a(g)v \in V$ siempre que $v \in V$. Se sigue por el lema 3.10, que $a(g)$ es una raíz de la unidad de orden 1, 2, 3, 4 ó 6. De esta forma N_1 tiene índice finito en G . Como cada elemento en el grupo abeliano discreto N_1 tiene la forma 3.20, no es difícil verificar que N_1 es finitamente generado y su rango es menor o igual a dos. \square

Proposición 3.4 Sea G un subgrupo discreto de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ tal que cada elemento puede ser inducido por una matriz de la forma (3.19) y $\Lambda(G) = \ell$. Si G contiene el elemento elipto-parabólico irracional inducido por E_2 , entonces el subgrupo normal N_2 consiste de aquellos elementos de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es un (finitamente generado) subgrupo abeliano de índice finito. De hecho, $b = v = 0$ para cada elemento en N_2 .

Demostración: Sea L el conjunto que consiste de aquellos $(\beta, v) \in \mathbb{C}^2$ para los cuales existe un elemento en G de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

No es difícil de comprobar que L es un subgrupo discreto de $(\mathbb{C}^2, +)$. Si suponemos que $b \neq 0$ para algún

$$f = \begin{pmatrix} a & b & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \in N_2,$$

entonces $L \neq 0$, pues el conmutador de E_2 y f es igual a

$$[E_2, f] = \begin{pmatrix} 1 & (a_0 - 1)b & (a_0 - 1)v - (a_0 - 1)bw - a_0b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $(\beta, v) \in L$ entonces $(a_0\beta, a_0v - a_0\beta) \in L$ (conjugando el elemento de la forma (3.21) por E_2). En otras palabras, la transformación \mathbb{C} -lineal inducida por

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ -a_0 & a_0 \end{pmatrix}$$

preserva L . Si suponemos que $\text{rango}(L) = 4$ entonces a_0 es una raíz de un polinomio con coeficientes enteros de la forma $p(x) = (x^2 - 2x \cos(2\pi\theta) + 1)^2$ y esto implica que a_0 es una raíz de la unidad, lo cual es una contradicción. De esta manera, $\text{rango}(L) \leq 3$. Por lo tanto, aplicando el lema 3.10 al grupo abeliano L y al número complejo unitario a_0 , obtenemos que a_0 es una raíz de la unidad, lo cual es una contradicción. Se sigue que $b = 0$ para todo $f \in N_2$.

Análogamente, podemos probar que $v = 0$ para todo $f \in N_2$, así cada $f \in N_2$ tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo cual implica que N_2 es un grupo abeliano de rango menor o igual a dos.

Sea W el conjunto de \mathbb{C} que consiste de aquellas $w \in \mathbb{C}$ tales que existe $f \in N_2$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que W es un subgrupo abeliano discreto de \mathbb{C} y $W \neq 0$ pues $E_2 \in N_2$.

Si $g \in G$ es un elemento arbitrario, entonces no es difícil verificar que $d(g)w \in W$ siempre que $w \in W$. Se sigue por el lema 3.10 que $d(g)$ es una raíz de la unidad de orden 1, 2, 3, 4 ó 6. De esta forma N_2 tiene índice finito en G .

□

Proposición 3.5 Sea G un subgrupo discreto de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ tal que $\Lambda(G) = \ell$ y cada elemento $g \in G$ es inducido por una matriz de la forma 3.19. Supongamos que para cada $g \in G$, existe $n \in \mathbb{N}$, que depende de g , tal que $a(g), d(g)$ son raíces n -ésimas de la unidad. Si N denota el subconjunto de G que consiste de aquellos elementos en G inducidos por matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces N es un subgrupo normal libre de torsión de índice finito de G (también es finitamente generado).

Demostración: Sea B el subgrupo abeliano de \mathbb{C} que consiste de todas aquellas $\beta \in \mathbb{C}$ para las cuales existe un elemento en N de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, sea W el subgrupo abeliano de \mathbb{C} que consiste de aquellas $\omega \in \mathbb{C}$ tal que existe un elemento en N de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & v \\ 0 & 1 & \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sea V el subconjunto de \mathbb{C} (no necesariamente es un grupo) que consiste de todas las ν en \mathbb{C} tales que existe un elemento en G de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & \nu \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como G actúa propia y discontinuamente en \mathbb{C}^2 , entonces también N actúa de la misma forma. Más aún, el grupo nilpotente N actúa libremente en \mathbb{C}^2 , así N es generado por a lo más cuatro elementos (ver págs. 152, 357 de [11] y el apéndice C). Se sigue que $\text{rango}(B) \leq 4$ y $\text{rango}(W) \leq 4$. Además, cuando V es un grupo abeliano, $\text{rango}(V) \leq 4$.

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $B \neq 0$ y $W \neq 0$.

En este caso, aplicando el lema 3.8 a W y a la raíz de la unidad $d(g)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ (que no depende de g) tal que para cada $g \in G$, $d(g)^{n_1} = 1$.

Similarmente, por el lema 3.8 aplicado a B y a la raíz de la unidad $a(g)/d(g)$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ (que no depende de g) tal que para cada $g \in G$, $(a(g)/d(g))^{n_2} = 1$.

De esta forma, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{n_0} \in N$ para cada $g \in G$.

Caso 2. $B \neq 0$, $W = 0$ y $V \neq 0$.

Análogamente al caso anterior, aplicando el lema 3.8 al grupo abeliano V y a la raíz de la unidad $a(g)/d(g)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(a(g)/d(g))^{n_1} = 1$ para cada $g \in G$.

Dado un elemento fijo

$$g_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & v_0 \\ 0 & d_0 & w_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

con $d_0 \neq 1$ (Si tal elemento no existe entonces se termina la prueba). Si $g \in G$ es un elemento arbitrario, entonces el conmutador $[g_0, g]$ tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & \nu \\ 0 & 1 & (d_0 - 1)w - (d - 1)w_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $(d_0 - 1)w - (d - 1)w_0 = 0$. De esta forma, conjugando G por la transformación proyectiva inducida por

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 - 1 & w_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos que

$$hgh^{-1} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{d_0 - 1} & -\frac{bw_0}{d_0 - 1} + v \\ 0 & d & (d_0 - 1)w - (d - 1)w_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } g \in G.$$

Por lo tanto, podemos suponer que $w = 0$ para todo $g \in G$.

Ahora, si $\nu \in V$ y g es un elemento arbitrario en G como anteriormente (es decir, $w(g) = 0$), obtenemos que

$$g \begin{pmatrix} 1 & \beta & \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a\beta}{d} & a\nu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, $a\nu \in V$. Se sigue, por el lema 3.8, que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_2} = 1$ para cada $g \in G$. De esta manera, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_0} \in N$ para cada $g \in G$.

Caso 3. $B \neq 0$, $W = 0$ y $V = 0$.

Este caso no puede suceder, pues el conjunto límite de Kulkarni de N debería ser igual a $\overleftrightarrow{e_1, e_3}$ (ver tabla 2.2).

Caso 4. $B = 0$, $W \neq 0$ y $V \neq 0$.

En este caso, V es un subgrupo abeliano de \mathbb{C} . Por el lema 3.8, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d^{n_1} = 1$ para cada $g \in G$. Fijando un elemento

$$g_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & v_0 \\ 0 & d_0 & w_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

con $a_0 \neq d_0$ (si tal elemento no existe entonces concluimos la prueba).

Si $g \in G$ es un elemento arbitrario, entonces el conmutador $[g_0, g]$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b(a_0 - d_0) - b_0(a - d)}{dd_0} & \nu \\ 0 & 1 & \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $[g_0, g] \in N$, también $b(a_0 - d_0) - b_0(a - d) = 0$.

Por lo tanto, podemos suponer, conjugando G por

$$h = \begin{pmatrix} a_0 - d_0 & b_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que $b = 0$ para todo $g \in G$.

No es difícil verificar que si $g \in G$, y $\nu \in V$, entonces $a\nu \in V$ (justamente conjugando por g). El lema 3.8 implica que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_2} = 1$ para cada $g \in G$.

Caso 5. $B = 0$, $W \neq 0$ y $V = 0$.

En este caso, W es un subgrupo abeliano de \mathbb{C} y no es difícil verificar que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d^{n_1} = 1$ para cada $g \in G$. Ahora consideremos el subgrupo normal N_1 que consiste de todos aquellos elementos en G de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No es difícil verificar, por cálculos directos que el conmutador de cualquiera dos elementos en G tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $B = V = 0$, se sigue que N_1 es un grupo abeliano.

Podemos suponer, conjugando por una matriz adecuada, que cada elemento en N_1 tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sigue que N_1 es un subgrupo abeliano de índice finito (finitamente generado) de G .

Caso 6. $B = 0$, $W = 0$ y $V \neq 0$.

En este caso, $V \neq 0$ es un subgrupo abeliano de \mathbb{C} y existe un número natural fijo $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_1} = 1$ para cada $g \in G$.

Ahora, sea N_2 el subgrupo normal de G que consiste de aquellos elementos de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b & v \\ 0 & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fijando un elemento

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & b_0 & v_0 \\ 0 & d_0 & w_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_2, d_0 \neq 1,$$

(si $d = 1$ para cada elemento en N_2 , entonces concluimos la prueba). Si

$$h = \begin{pmatrix} 1 & b & v \\ 0 & d & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_2,$$

entonces $[h, h_0] \in N$. Por lo tanto

$$(1-d)b_0 + (1-d_0)b = 0 = (1-d)w_0 + (1-d_0)w.$$

Así, conjugando por

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b_0}{1-d_0} & 0 \\ 0 & d_0-1 & w_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

podemos suponer que cada elemento en N_2 tiene la forma:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sigue que N_2 es un subgrupo abeliano de índice finito (finitamente generado) de G .

Caso 7. $B = 0$, $W = 0$ y $V = 0$.

En este caso, cada elemento en G es de orden finito, así G es finito.

□

Teorema 3.2 Sea $G \leq \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ tal que $\Lambda(G) = \ell$, entonces:

- (i) Si G contiene un elemento loxo-parabólico, entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_0}$, para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es un grupo de rango dos, generado por un elemento loxo-parabólico y otro elemento que puede ser de nuevo loxo-parabólico o bien, parabólico. Además, \mathbb{Z}_{n_0} es un grupo de reflexiones complejas.
- (ii) Si G no contiene elementos loxo-parabólicos y G no contiene elementos que actúen como parabólicos en $\ell = \Lambda(G)$, entonces G es un grupo de isometrías de \mathbb{C}^2 y contiene un subgrupo libre normal abeliano de índice finito y de rango ≤ 4 .
- (iii) Si G no contiene elementos loxo-parabólicos, pero contiene elementos que actúen como parabólicos en $\Lambda(G) = \ell$, entonces G no contiene elementos elipto-parabólicos irracionales y es una extensión finita de un subgrupo unipotente (este subgrupo consiste de transformaciones parabólicas unipotentes). Por lo tanto es una extensión finita de un grupo de la forma: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}^4, \Delta_k$ o Γ_k , donde

$$\Delta_k = \langle A, B, C, D : C, D \text{ son centrales, y } [A, B] = C^k \rangle$$

$$\Gamma_k = \langle A, B, C : C \text{ es central, y } [A, B] = C^k \rangle, k \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

- (i) La prueba se sigue de la proposición 3.1
- (ii) Como G no contiene elementos que actúen como parabólicos en ℓ , se sigue que $\phi(G) \setminus \{Id\}$ induce únicamente elementos elípticos, donde ϕ se define como en 3.3. Notemos que el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tiene módulo igual a uno. Por lo tanto, cada elemento en $\phi(G)$ puede ser escrito como una matriz de la forma

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{S}^1 \text{ y } ad - bc = 1.$$

Dado que G induce un grupo puramente elíptico que actúa en $\widehat{\mathbb{C}}$, existe un punto fijo global para la acción de ϕ en $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ (ver pág. 62 de [20]). Podemos suponer que este punto fijo global es $(0, 0, 1)$ (en el modelo del semiespacio superior), entonces cada elemento en $\phi(G)$ puede ser escrito como una matriz de la forma

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{S}^1 \text{ y } |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

De esta forma, cada elemento $g \in G$ puede ser escrito de la forma:

$$g = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } A \in U(2); v, 0^T \in \mathbb{C}^2.$$

Por lo tanto, G es un subgrupo discreto de isometrías de \mathbb{R}^4 . Por el teorema A.7 del apéndice A, G contiene un subgrupo abeliano libre normal de índice finito, de rango ≤ 4 .

- (iii) Si G contiene al elemento elipto-parabólico E_1 entonces la proposición 3.3 implica que el grupo N_1 es un subgrupo abeliano normal de índice finito, y ningún elemento en N_1 actúa en ℓ como un elemento parabólico. Si suponemos que existe $g \in G$, tal que $\phi(g)$ actúa en ℓ como un elemento parabólico entonces para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, tenemos que $\phi(g)^{n_0} \in \phi(N_1)$ actúa como un elemento parabólico en ℓ lo cual es una contradicción. Un argumento similar, usando la proposición 3.3, muestra que G no puede contener al elemento elipto-parabólico E_2 .

La segunda parte es análoga a la prueba del teorema C.1 del apéndice C, y la cual incluimos por conveniencia. Por la proposición 3.5, G es una extensión finita de un grupo discreto unipotente N , y por el teorema B.11 del apéndice B, existe un único grupo de Lie unipotente H tal que H/N es compacto (en consecuencia, N es finitamente generado). Este grupo H es necesariamente simplemente conexo, de hecho es un espacio Euclidiano.

Como N actúa propia y discontinuamente (y libremente) en \mathbb{C}^2 se sigue que la dimensión proyectiva del anillo de grupos enteros de N es menor o igual cuatro (ver pág. 152 de [11]). Además, la dimensión de H es menor o igual a cuatro.

Los grupos de Lie nilpotentes simplemente conexos de dimensión cuatro son: \mathbb{R}^4 y $H_3 \times \mathbb{R}$, donde H_3 denota el grupo real de Heisenberg (ver ejemplo B.2 del apéndice B). Los grupos de Lie nilpotentes simplemente conexos de dimensión tres son H_3 y \mathbb{R}^3 . Finalmente, los grupos de Lie nilpotentes simplemente conexos de dimensión dos y uno son \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} .

Los subgrupos discretos con cociente compacto de $H_3 \times \mathbb{R}$ son de la forma:

$$\Delta_k = \langle A, B, C, D : \text{tal que } C, D \text{ son centrales, y } [A, B] = C^k \rangle, \quad \text{donde } k \in \mathbb{N}.$$

Los subgrupos discretos de H_3 con cociente compacto son de la forma:

$$\Gamma_k = \langle A, B, C : \text{tal que } C \text{ es central, y } [A, B] = C^k \rangle, \quad \text{donde } k \in \mathbb{N}.$$

Para más detalles acerca de estos últimos subgrupos, ver [13] y el apéndice C. \square

Observación 3.2 Si $\phi(G) \setminus \{Id\}$ induce únicamente elementos elípticos, entonces G es conjugado en $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ a algún grupo tal que cada elemento en un subgrupo de índice finito es inducido por una matriz triangular superior.

3.3.1. Ejemplos de grupos que no contienen loxo-parabólicos

Ejemplo 3.2 Siguiendo con la misma numeración del ejemplo 3.1, tenemos:

(iii) Sea G_3 el grupo generado por las transformaciones proyectivas

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e^{2\pi i\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & e^{2\pi i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde θ_1, θ_2 son números reales fijos. Para verificar que G_3 actúa propia y discontinuamente sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftrightarrow{e_1, e_2}$, usaremos nuevamente, el mismo procedimiento dado en el inciso (vii) del ejemplo 2.1.

Como G_3 es abeliano, cualquier elemento en este grupo es de la forma:

$$g_4^m \cdot g_5^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m + in \\ 0 & e^{2m\pi i\theta_1} e^{2n\pi i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}.$$

El conjunto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftrightarrow{e_1, e_2}$ es naturalmente indentificado con \mathbb{C}^2 por el mapeo

$$[z_1 : z_2 : 1] \mapsto (z_1, z_2),$$

de esta manera, las acciones quedan determinadas como

$$\begin{aligned} g_4(z_1, z_2) &= (z_1 + 1, e^{2\pi i\theta_1} z_2), \\ g_5(z_1, z_2) &= (z_1 + i, e^{2\pi i\theta_2} z_2). \end{aligned}$$

Si para alguna $R > 0$ fija, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ satisface que

$$\|(z_1, z_2)\|_1 = |z_1| + |z_2| \leq R \tag{3.22}$$

y

$$\|g_4^m \cdot g_5^n(z_1, z_2)\|_1 = |z_1 + m + in| + |e^{2m\pi i\theta_1} e^{2n\pi i\theta_2} z_2| \leq R, \tag{3.23}$$

entonces,

$$\begin{aligned} 2R &\geq |z_1| + |z_1 + m + in| \\ &= |-z_1| + |z_1 + m + in| \\ &\geq |-z_1 + z_1 + m + in| \\ &= |m + in|, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$2R \geq |m|$$

y

$$2R \geq |n|.$$

Así, analizando los posibles valores de $m, n \in \mathbb{Z}$, se sigue que las igualdades 3.22 y 3.23 se satisfacen para un número finito de valores de m y n . Por lo tanto, el grupo abeliano $\langle g_4, g_5 \rangle$ actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$.

Se sigue del teorema 3.2 (ii) que $\Lambda(G_3) = \overleftarrow{e_1, e_2}$. En este caso $\phi(G_3)$ no contiene elementos parabólicos.

- (iv) Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ un número fijo. El grupo abeliano G_4 , generado por las transformaciones proyectivas

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{n_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e^{2\pi i \theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & e^{2\pi i \theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

es una extensión finita del grupo G_3 , pues como habíamos visto en el ejemplo 3.1, g_3 es un elemento de orden finito. Por lo tanto, de la proposición 2.1, obtenemos que $\Lambda(G_4) = \overleftarrow{e_1, e_2}$.

- (v) Sea G_5 el grupo generado por las transformaciones proyectivas

$$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente al inciso (iii), G_5 es abeliano, entonces podemos suponer que cualquier elemento en este grupo es de la forma:

$$g_6^l \cdot g_7^k \cdot g_8^m \cdot g_9^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l + ik \\ 0 & 1 & m + in \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } k, l, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Como el conjunto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$ es naturalmente indentificado con \mathbb{C}^2 por el mapeo

$$[z_1 : z_2 : 1] \mapsto (z_1, z_2),$$

las acciones quedan determinadas por

$$\begin{aligned} g_6(z_1, z_2) &= (z_1 + 1, z_2), \\ g_7(z_1, z_2) &= (z_1 + i, z_2), \\ g_8(z_1, z_2) &= (z_1, z_2 + 1), \\ g_9(z_1, z_2) &= (z_1, z_2 + i). \end{aligned}$$

Si para alguna $R > 0$ fija, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ satisface que

$$\|(z_1, z_2)\|_1 = |z_1| + |z_2| \leq R \quad (3.24)$$

y

$$\|g_6^l \cdot g_7^k \cdot g_8^m \cdot g_9^n(z_1, z_2)\|_1 = |z_1 + l + ik| + |z_2 + m + in| \leq R, \quad (3.25)$$

entonces,

$$\begin{aligned} 2R &\geq |z_2| + |z_2 + m + in| \\ &\geq |m + in|, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$2R \geq |m|$$

y

$$2R \geq |n|.$$

De esta forma, analizando los posibles valores de $m, n \in \mathbb{Z}$, se sigue que las igualdades 3.24 y 3.25 se satisfacen para un número finito de valores de m y n . Por lo tanto, el grupo abeliano G_5 actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$.

Por el teorema 3.2 (ii), obtenemos que $\Lambda(G_5) = \overleftarrow{e_1, e_2}$. En este caso $\phi(G_5)$ consiste del elemento identidad.

- (vi) Análogamente al inciso (iv). El grupo abeliano G_6 , generado por G_5 y la transformaciones proyectivas

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{n_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es un grupo cuyo conjunto límite de Kulkarni es igual a $\overleftarrow{e_1, e_2}$

- (vii) Si k es un número fijo natural, entonces el grupo G_7 generado por las transformaciones proyectivas

$$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$ y por el teorema 3.2 (ii) $\Lambda(G_7)$ es igual a $\overleftarrow{e_1, e_2}$. En este caso, $\phi(G_7)$ es un grupo cíclico generado por un elemento parabólico. Notemos que G_7 es un grupo 2-pasos nilpotente, el cual es una retícula uniforme de $H_3 \times \mathbb{R}$, donde H_3 es el grupo de Heisenberg de dimensión 3 real (ver [13] y el apéndice C). Si Γ es un subgrupo de G_7 tal que $0 < \text{rango}(\Gamma) < 4$, entonces $\Lambda(\Gamma) = \overleftarrow{e_1, e_2}$. En este caso, el cociente de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftarrow{e_1, e_2}$ por Γ no es compacto.

3.4. Dominios fundamentales débiles

No es posible dibujar fácilmente una imagen, o describir, a un grupo kleiniano. Lo más cerca que podemos llegar a esto, es en general, hacer un dibujo de Ω/G que de alguna manera ilustra la acción de G . La imagen habitual es dada por un conjunto o dominio fundamental (DF), que en términos generales, contiene un punto de cada clase de equivalencia en Ω y que, en cierto sentido, ilustra la topología de Ω/G . Sin embargo, para el caso de los grupos kleinianos complejos, no encontramos un concepto que se adapte o funcione bien para todos los efectos que éste requiere, lo anterior no significa que no exista o no sea posible encontrar tal dominio. De hecho, un problema interesante que sigue abierto, es el de encontrar dominios fundamentales para los grupos kleinianos complejos elementales.

En esta sección damos tres ejemplos de dominios fundamentales débiles (DFD), estos dominios son un tipo, o más bien, son conjuntos que de cierta manera son parecidos a los DF. La definición de DFD fué introducida por Kulkarni (ver [18]), por lo cual se nos hizo factible tratar de dar algunos ejemplos de dichos dominios, recordemos que estamos trabajando con subgrupos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ que tienen región de discontinuidad de Kulkarni no vacía.

Pero dada la importancia de los DF, a continuación presentamos una definición de DF tomada del libro de *Complex Kleinian Groups* (ver pág. 19 de [9]). Posteriormente introduciremos la definición de DFD, así como los ejemplos mencionados.

3.4.1. Dominios fundamentales

Sea G un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, entonces

Definición 3.1 Un *dominio fundamental* (DF) para la acción de G en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es un conjunto abierto $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tal que satisface las siguientes dos condiciones:

- i) Si \bar{D} denota la cerradura (topológica) de D en Ω , entonces para elementos distintos arbitrarios g_1, g_2 en G se cumple que $g_1(D)$ y $g_2(D)$ no se intersectan, i.e., $g_1(D) \cap g_2(\bar{D}) = \emptyset$.
- ii) La unión $\bigcup_{g \in G} g(\bar{D})$ de todos los conjuntos $g(\bar{D})$ para todo $g \in G$, es todo el espacio Ω .

En otras palabras, las diversas imágenes de \bar{D} por los elementos de G cubren todo el espacio y son disjuntas dos a dos, excepto para los puntos en la frontera de \bar{D} .

Los dominios fundamentales aparecen frecuentemente en varios contextos de la geometría y la dinámica. Son importantes por diversas razones, pero básicamente por el

hecho de que podemos conocer en esencia todo acerca de la acción del grupo en la región de la discontinuidad con sólo mirar el dominio fundamental y la forma en que el grupo se relaciona con los puntos en su frontera, como habíamos mencionado.

Observemos que un dominio fundamental para un grupo G no es único. En particular, si D es un dominio fundamental, entonces cada trasladado $g(D)$ por un elemento de G es también un dominio fundamental. De hecho no puede haber dominios fundamentales totalmente distintos para un cierta acción de grupo.

Hay varios métodos para construir dominios fundamentales para la acción de un grupo discreto, sin embargo, nuestro propósito no es abundar sobre ésto último, si no más bien es únicamente definir el concepto de DF, aunque para más información podemos consultar el libro de Beardon (ver [8]).

Ahora veremos el concepto de un domominio fundamental débil, el contenido de la siguiente subsección fué tomado del artículo de Kulkarni [18].

3.4.2. Dominios fundamentales débiles

Sea Ω un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y G un grupo de homeomorfismos de Ω actuando propia y discontinuamente. Entonces, aún cuando el cociente Ω/G no sea un espacio compacto, se define lo siguiente.

Definición 3.2 *Un dominio fundamental débil (DFD) para G en Ω es un subconjunto D de Ω tal que*

- i) Los G -trasladados de D cubren a Ω .
- ii) La proyección canónica $D \rightarrow \Omega/G$ es propia.

Notemos que si D es un DFD entonces D es un conjunto cerrado de Ω . También si D es un DFD y S es un subconjunto de Ω tal que la proyección canónica $S \rightarrow \Omega/G$ es propia, entonces $D \cup S$ es también un DFD.

Supongamos que Ω admite una base numerable. La proyección canónica $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/G$ es una aplicación abierta (ver teo. B.2 del ap. B). Así que Ω/G es también localmente compacto y la imagen de una base contable para Ω bajo π es una base contable para la topología de Ω/G . Además, si Ω es localmente conexo también lo es Ω/G . Llamaremos a un par (\tilde{V}, V) **admisibles** si $\pi(\tilde{V}) = V$, donde \tilde{V} respectivamente V es un subconjunto compacto de Ω respectivamente de Ω/G .

Lema 3.11 Si V es cualquier subconjunto compacto de Ω/G , entonces existe un subconjunto compacto \tilde{V} de Ω tal que (\tilde{V}, V) es admisible. Además si Ω es localmente conexo, y V es conexo, entonces \tilde{V} puede ser elegido de tal manera que sea conexo [18].

Demostración: Para cualquier $x \in V$ y x' en Ω tal que $\pi(x') = x$, existe una vecindad compacta $U_{x'}$ de x' tal que $U_x = \pi(U_{x'})$ es una vecindad compacta de x . Existe un número finito de puntos $\{x_i\}$ con $1 \leq i \leq k$, tal que la correspondiente U_{x_i} cubre V . Entonces la unión de $U_{x_i} \cap \pi^{-1}(V)$ es un subconjunto compacto de Ω que es enviado a V . Si Ω es localmente conexo entonces podríamos elegir $U_{x'}$ y por lo tanto U_x será conexo. Si además V es conexo, trasladando los componentes de \tilde{V} construido anteriormente por los elementos de G podemos tomar \tilde{V} de tal manera que también sea conexo. \square

El siguiente teorema nos garantiza que bajo ciertas hipótesis sobre el dominio de discontinuidad de Kulkarni Ω , existe siempre un DFD.

Teorema 3.3 Supongamos que Ω admite una base numerable para su topología. Entonces existe un DFD para G en Ω . Además si Ω es localmente conexo y Ω/G es conexo entonces existe un DFD conexo [18].

Demostración: Para probar el teorema sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una cubriente localmente finita de Ω/G por vecindades compactas. Si $\{\tilde{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ son subconjuntos compactos de Ω tal que (\tilde{V}_n, V_n) son pares admisibles, entonces no es difícil ver que $\bigcup_n \tilde{V}_n$ es un DFD.

Ahora supongamos que Ω es localmente conexo y Ω/G es conexo. Construimos un DFD conexo como sigue. En primer lugar tomamos las V_n de tal manera que sean conexas. Sea $W_1 = V_1$, $\mathcal{W}_1 = \{V_1\}$ y por inducción el conjunto

$$\mathcal{W}_n = \{V_i : V_i \cap W_{n-1} \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad W_n = \bigcup V_i,$$

donde esta última unión es sobre los V_i que están en \mathcal{W}_n . Entonces $\{W_n\}$ es una familia creciente de subconjuntos compactos conexos cuya unión es Ω/G . Ahora como se observa en el lema anterior, podemos tomar \tilde{V}_n tal que sea conexo. Sean

$$\tilde{W}_1 = \tilde{V}_1 \quad \tilde{\mathcal{W}}_1 = \{\tilde{V}_1\}.$$

Inductivamente construimos \tilde{W}_n y $\tilde{\mathcal{W}}_n$ de manera que $\{\tilde{W}_n\}$ es una familia creciente de subconjuntos compactos conexos en Ω . Supongamos que hemos construido \tilde{W}_{n-1} y $\tilde{\mathcal{W}}_{n-1}$. Consideremos los pares admisibles (\tilde{V}_i, V_i) , donde V_i está en \mathcal{W}_n . Al trasladar por elementos de G si es necesario podemos suponer que \tilde{V}_i interseca a \tilde{W}_{n-1} . Con ésta posible modificación tomamos \tilde{W}_n para ser la unión de $\tilde{\mathcal{W}}_{n-1}$, y adicionalmente \tilde{V}_i y \tilde{W}_n para ser la unión de \tilde{V}_i en $\tilde{\mathcal{W}}_n$. No es difícil ver que la unión de \tilde{W}_n es un DFD conexo. \square

3.4.3. Ejemplos de DFD

En el siguiente ejemplo presentamos un DFD para cada uno de los siguientes grupos: G_1, G_3, G_5 . Estos grupos fueron dados anteriormente en el inciso (i) del ejemplo 3.1 y en los incisos (iii),(v) del ejemplo 3.2.

Recordemos que todos estos grupos actúan propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftrightarrow{e_1, e_2} \cong \mathbb{C}^2$, y además tienen por conjunto límite de Kulkarni a $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$.

Las definiciones y resultados topológicos que utilizamos para hallar los DFD, están enunciados en el apéndice B.

Cuando G contiene un elemento loxo-parabólico

Ejemplo 3.3 En el siguiente ejemplo d, v y λ son números complejos fijos, con $d \neq 0$, $Re(v) \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, $Im(v) \neq 0$ y $0 < |\lambda| < 1$.

(i) El grupo abeliano G_1 , generado por las transformaciones proyectivas

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El DFD de G_1 , es el conjunto

$$D_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 0 \leq Re(z_1) \leq a, 0 \leq Im(z_1) \leq b, |z_2| \leq 1\},$$

donde $a = 1 + Re(v)$ y $b = Im(v)$; como se muestra en la siguiente figura.

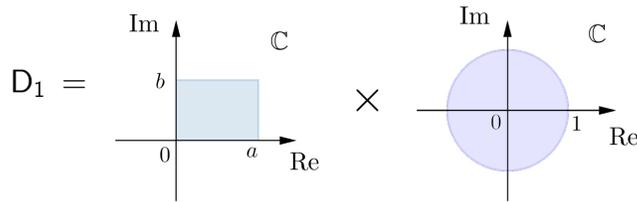


Figura 3.1: Dominio fundamental débil para G_1 .

Para demostrarlo primero observemos que cualquier elemento en G_1 es de la forma

$$g_1^m \cdot g_2^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m + nv \\ 0 & \lambda^m d^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Es decir,

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m + nv \\ 0 & \lambda^m d^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

El conjunto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overrightarrow{e_1, e_2}$ es naturalmente indentificado con \mathbb{C}^2 por el mapeo

$$[z_1 : z_2 : 1] \mapsto (z_1, z_2),$$

de esta manera, las acciones quedan determinadas como

$$\begin{aligned} g_1(z_1, z_2) &= (z_1 + 1, \lambda z_2), \\ g_2(z_1, z_2) &= (z_1 + v, d z_2). \end{aligned}$$

Entonces, si $(z_1, z_2) \in D_1$ obtenemos que

$$g_1^m \cdot g_2^n(z_1, z_2) = (z_1 + m + nv, \lambda^m d^n z_2) \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, si m y n corren sobre los número enteros \mathbb{Z} , obtenemos que el conjunto

$$\{(z_1 + m + nv, \lambda^m d^n z_2) : (z_1, z_2) \in D_1\}$$

cubre a todo \mathbb{C}^2 , es decir, los G_1 -trasladados de D_1 cubren a todo \mathbb{C}^2 . Por lo tanto, D_1 cumple la condición (i) de DFD.

Para concluir que D_1 es un DFD, sólo falta demostrar la condición (ii), para ésto tenemos la siguiente estrategia.

- (1) Demostrar que \mathbb{C}^2/G_1 y $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ son homeomorfos, donde \mathbb{T} es la superficie del toro.
- (2) Una vez obtenido el paso anterior, será suficiente demostrar que la proyección π , dada por $\pi : D_1 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ es propia.

Paso (1): Sea $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ dada por

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{\operatorname{Im}(v)}\right)}, \frac{\lambda^{1-\operatorname{Re}(z_1)} z_2}{\lambda^{-\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{\operatorname{Im}(v)}\right) \operatorname{Re}(v)} d^{\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{\operatorname{Im}(v)}\right)}} \right).$$

La función φ es una aplicación abierta, más aún, φ es una aplicación cociente.

Sea $\phi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto \left(e^{2\pi i z_1}, e^{2\pi i z_2}, \frac{\lambda^{1-z_1} z_3}{\lambda^{-z_2 \operatorname{Re}(v)} d^{z_2}} \right).$$

Si J_ϕ es la matriz jacobiana de ϕ , entonces

$$J_\phi = \begin{pmatrix} 2\pi i e^{2\pi i z_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi i e^{2\pi i z_2} & 0 \\ \frac{-\ln(\lambda) \lambda^{1-z_1} z_3}{\lambda^{-z_2} Re(v) d^{z_2}} & \frac{\ln\left(\frac{\lambda^{Re(v)}}{d}\right) \lambda^{1-z_1} z_3}{\lambda^{-z_2} Re(v) d^{z_2}} & \frac{\lambda^{1-z_1}}{\lambda^{-z_2} Re(v) d^{z_2}} \end{pmatrix},$$

luego $\det(J_\phi) = \frac{-4\pi^2 e^{2\pi i(z_1+z_2)} \lambda^{1-z_1}}{\lambda^{-z_2} Re(v) d^{z_2}} \neq 0$ para todo $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$.

Por lo tanto, por el lema B.1, ϕ es localmente una aplicación abierta y dado que ϕ es continua, obtenemos que ϕ es una aplicación abierta.

Por otra parte, sea $U = \{(Re(z_1), Im(\frac{z_1}{Im(v)}), z_3) : z_1, z_3 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3$, si restringimos ϕ al conjunto U también obtenemos una aplicación abierta, ésto es $\phi|_U : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ es abierta. Así, como $\varphi = \phi|_U$, concluimos que φ es una aplicación abierta, esto último implica que φ es una aplicación cociente, pues φ es continua y sobreyectiva (ver def. B.6).

También notemos que

$$\begin{aligned} \varphi(z_1 + 1, \lambda z_2) &= \left(e^{2\pi i Re(z_1+1)}, e^{2\pi i Im\left(\frac{z_1+1}{Im(v)}\right)}, \frac{\lambda^{1-Re(z_1+1)} \lambda z_2}{\lambda^{-Im\left(\frac{z_1+1}{Im(v)}\right) Re(v) d^{Im\left(\frac{z_1+1}{Im(v)}\right)}} \right) \\ &= \left(e^{2\pi i (Re(z_1)+1)}, e^{2\pi i Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)}, \frac{\lambda^{1-Re(z_1)-1} \lambda z_2}{\lambda^{-Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right) Re(v) d^{Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)}} \right) \\ &= \left(e^{2\pi i Re(z_1)}, e^{2\pi i Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)}, \frac{\lambda^{1-Re(z_1)} z_2}{\lambda^{-Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right) Re(v) d^{Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)}} \right) \\ &= \varphi(z_1, z_2), \end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned} \varphi(z_1 + v, dz_2) &= \left(e^{2\pi i Re(z_1+v)}, e^{2\pi i Im\left(\frac{z_1+v}{Im(v)}\right)}, \frac{\lambda^{1-Re(z_1+v)} dz_2}{\lambda^{-Im\left(\frac{z_1+v}{Im(v)}\right) Re(v) d^{Im\left(\frac{z_1+v}{Im(v)}\right)}} \right) \\ &= \left(e^{2\pi i (Re(z_1)+Re(v))}, e^{2\pi i (Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)+1)}, \frac{\lambda^{1-Re(z_1)-Re(v)} dz_2}{\lambda^{-(Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)+1) Re(v) d^{Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)+1}} \right) \\ &= \left(e^{2\pi i Re(z_1)}, e^{2\pi i Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)}, \frac{\lambda^{1-Re(z_1)} z_2}{\lambda^{-Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right) Re(v) d^{Im\left(\frac{z_1}{Im(v)}\right)}} \right) \\ &= \varphi(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Como todo elemento $g \in G_1$ es de la forma $g = g_1^m \cdot g_2^n$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, i.e.,

$$g(z_1, z_2) = g_1^m \cdot g_2^n(z_1, z_2) = (z_1 + m + nv, \lambda^m d^n z_2),$$

se sigue que, dado $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ entonces $\varphi(g(z_1, z_2)) = \varphi(z_1, z_2)$ para toda $g \in G$.

El conjunto cociente \mathbb{C}^2/G_1 es el conjunto de clases de equivalencias, las cuales se forman en \mathbb{C}^2 con la siguiente relación de equivalencia:

$$(z_1, z_2) \sim_{G_1} (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow \exists g \in G_1 \text{ talque } g(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2).$$

Observación 3.3 $(z_1, z_2) \sim_{G_1} (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow \varphi(z'_1, z'_2) = \varphi(z_1, z_2)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) \sim_{G_1} (z'_1, z'_2) &\Leftrightarrow \exists g \in G_1 \text{ talque } g(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2) \\ &\Rightarrow \varphi(z'_1, z'_2) = \varphi(g(z_1, z_2)) = \varphi(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Recíprocamente, la ecuación $\varphi(z_1, z_2) = \varphi(z'_1, z'_2)$ implica que

$$(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow g_e(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2),$$

donde g_e es el elemento neutro de G_1 , es decir, $\exists g \in G_1$ tal que $g(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2)$.

Sea $p : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/G_1$ la aplicación cociente que va de \mathbb{C}^2 al espacio cociente \mathbb{C}^2/G_1 , entonces por la observación anterior φ es una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}([(z_1, z_2)])$, para $[(z_1, z_2)] \in \mathbb{C}^2/G_1$. Por lo tanto, por el teorema B.3, φ induce una aplicación cociente $\psi : \mathbb{C}^2/G_1 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ tal que $\psi \circ p = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & & \\ \downarrow p & \searrow \varphi & \\ \mathbb{C}^2/G_1 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T} \times \mathbb{C} \end{array}$$

Observemos que ψ está bien definida y además es biyectiva, ya que:

- $\varphi(z_1, z_2) = \varphi(z'_1, z'_2)$ implica $[z_1, z_2] = [z'_1, z'_2]$,
- y por definición ψ es sobreyectiva.

De esta forma ψ es una aplicación cociente biyectiva, es decir, ψ es una aplicación biyectiva tal que $\psi(W)$ es abierto si, y sólo si, W es abierto. Por lo tanto, ψ es un homeomorfismo.

Paso (2): Probar que $\pi : D_1 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ es propia.

Sea $\pi : D_1 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$, notemos que D_1 es un conjunto compacto de \mathbb{C}^2 . Además, $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ es un espacio métrico, así que por el teorema B.7, un conjunto compacto en $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ es cerrado y acotado .

De esta forma, sea K un conjunto compacto en $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$, entonces $\pi^{-1}(K)$ es cerrada, por lo tanto por el teorema B.4, $\pi^{-1}(K)$ es un conjunto compacto. Así, la proyección π es propia.

Por lo tanto, D_1 es un DFD para G_1 . □

El espacio cociente D_1/G_1 es homeomorfo $\mathbb{C}^2/G_1 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{C}$.

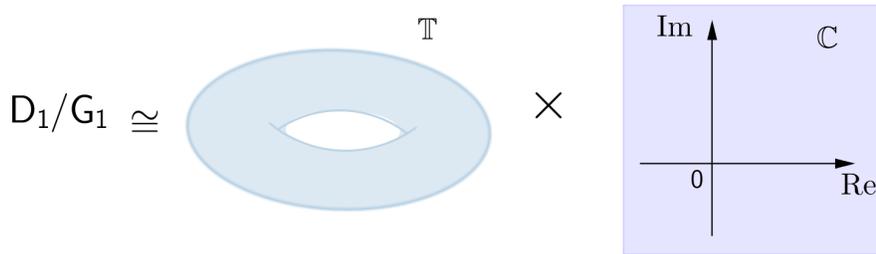


Figura 3.2: Espacio cociente $D_1/G_1 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{C}$.

La demostración es análoga a la que utilizamos para demostrar que $\mathbb{C}^2/G_1 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{C}$.

Sea $p|_{D_1} : D_1 \rightarrow D_1/G_1$, entonces π es una aplicación que es constante sobre cada conjunto $(p|_{D_1})^{-1}([(z_1, z_2)])$, para $[(z_1, z_2)] \in D_1/G_1$. Por lo tanto, por el teorema B.3, π induce una aplicación cociente $\rho : D_1/G_1 \rightarrow \mathbb{C}^2/G_1$ tal que $\rho \circ p|_{D_1} = \pi$.

$$\begin{array}{ccc}
 D_1 & & \\
 p|_{D_1} \downarrow & \searrow \pi & \\
 D_1/G_1 & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C}^2/G_1
 \end{array}$$

Como ρ es biyectiva, pues por definición es sobreyectiva y además, $\pi([(z_1, z_2)]) = \pi([(z'_1, z'_2)])$ implica $[z_1, z_2] = [z'_1, z'_2]$. Entonces, ρ es un homeomorfismo. Por lo tanto,

$$D_1/G_1 \cong \mathbb{C}^2/G_1 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{C}.$$

Cuando G no contiene elementos loxo-parabólicos

(ii) El grupo abeliano G_3 generado por las transformaciones proyectivas

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e^{2\pi i\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & e^{2\pi i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde θ_1, θ_2 son números reales fijos.

El DFD de G_3 , es el conjunto

$$D_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 0 \leq \operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Im}(z_1) \leq 1\}.$$

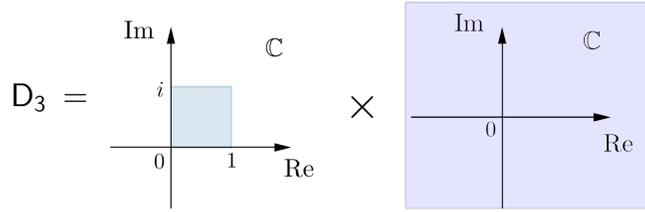


Figura 3.3: Dominio fundamental débil para G_3 .

La demostración es similar a la del ejemplo anterior. En efecto, observemos que cualquier elemento en G_3 es de la forma

$$g_4^m \cdot g_5^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m + in \\ 0 & e^{2m\pi i\theta_1} e^{2n\pi i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Es decir,

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m + in \\ 0 & e^{2m\pi i\theta_1} e^{2n\pi i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

El conjunto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overrightarrow{e_1, e_2}$ es naturalmente indentificado con \mathbb{C}^2 por el mapeo

$$[z_1 : z_2 : 1] \mapsto (z_1, z_2),$$

de esta manera, las acciones quedan determinadas como

$$\begin{aligned} g_4(z_1, z_2) &= (z_1 + 1, e^{2\pi i\theta_1} z_2), \\ g_5(z_1, z_2) &= (z_1 + i, e^{2\pi i\theta_2} z_2). \end{aligned}$$

Entonces, si $(z_1, z_2) \in D_3$ obtenemos que

$$g_4^m \cdot g_5^n(z_1, z_2) = (z_1 + m + in, e^{2\pi i(m\theta_1 + n\theta_2)} z_2) \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, si m y n corren sobre los número enteros \mathbb{Z} , obtenemos que el conjunto

$$\{(z_1 + m + in, e^{2\pi i(m\theta_1 + n\theta_2)} z_2) : (z_1, z_2) \in D_3\}$$

cubre a todo \mathbb{C}^2 , es decir, los G_3 -trasladados de D_3 cubren a todo \mathbb{C}^2 . Por lo tanto, D_3 cumple la condición (i) de DFD.

Para probar que D_3 cumple la condición (ii) de DFD, tenemos la misma estrategia.

- (1) Demostrar que \mathbb{C}^2/G_3 y $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ son homeomorfos, donde \mathbb{T} es la superficie del toro.
- (2) Una vez obtenido el paso anterior, será suficiente demostrar que la proyección π , dada por $\pi : D_3 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ es propia.

Paso (1): Sea $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ dada por

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, \frac{z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))}} \right).$$

La función φ es una aplicación abierta, más aún, φ es una aplicación cociente.

Sea $\phi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto \left(e^{2\pi i z_1}, e^{2\pi i z_2}, \frac{z_3}{e^{2\pi i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)}} \right).$$

Si J_ϕ es la matriz jacobiana de ϕ , entonces

$$J_\phi = \begin{pmatrix} 2\pi i e^{2\pi i z_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi i e^{2\pi i z_2} & 0 \\ \frac{-2\pi i \theta_1 z_3}{e^{2\pi i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)}} & \frac{-2\pi i \theta_2 z_3}{e^{2\pi i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)}} & \frac{1}{e^{2\pi i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)}} \end{pmatrix},$$

luego $\det(J_\phi) = \frac{-4\pi^2 e^{2\pi i(z_1 + z_2)}}{e^{2\pi i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)}} \neq 0$ para todo $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$.

Por lo tanto, por el lema B.1, ϕ es localmente una aplicación abierta y dado que ϕ es continua, obtenemos que ϕ es una aplicación abierta.

Sea $U = \{(\operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Im}(z_1), z_3) : z_1, z_3 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3$, si restringimos ϕ al conjunto U obtenemos que $\phi|_U : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ es una aplicación abierta. Así, como $\varphi = \phi|_U$,

concluimos que φ es una aplicación abierta y esto último implica que φ es una aplicación cociente (ver def. B.6).

También notemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(z_1 + 1, e^{2\pi i \theta_1} z_2) &= \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1+1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1+1)}, \frac{e^{2\pi i \theta_1} z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1+1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1+1))}} \right) \\
&= \left(e^{2\pi i(\operatorname{Re}(z_1)+1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, \frac{e^{2\pi i \theta_1} z_2}{e^{2\pi i(\theta_1(\operatorname{Re}(z_1)+1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))}} \right) \\
&= \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, \frac{z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))}} \right) \\
&= \varphi(z_1, z_2),
\end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned}
\varphi(z_1 + i, e^{2\pi i \theta_2} z_2) &= \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1+i)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1+i)}, \frac{e^{2\pi i \theta_2} z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1+i) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1+i))}} \right) \\
&= \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i(\operatorname{Im}(z_1)+1)}, \frac{e^{2\pi i \theta_2} z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2(\operatorname{Im}(z_1)+1))}} \right) \\
&= \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, \frac{z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))}} \right) \\
&= \varphi(z_1, z_2),
\end{aligned}$$

Recordemos que si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, entonces todo para todo elemento $g \in G_3$ se tiene que

$$\varphi(g(z_1, z_2)) = \varphi(z_1, z_2),$$

esto se debe a que los elementos de G_3 son de la forma:

$$g(z_1, z_2) = g_4^m \cdot g_5^n(z_1, z_2) = (z_1 + m + in, e^{2\pi i(m\theta_1 + n\theta_2)} z_2),$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$.

El conjunto cociente \mathbb{C}^2/G_3 es el conjunto de clases de equivalencias en \mathbb{C}^2 formadas como sigue:

$$(z_1, z_2) \sim_{G_3} (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow \exists g \in G_3 \text{ talque } g(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2).$$

Observación 3.4 $(z_1, z_2) \sim_{G_3} (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow \varphi(z'_1, z'_2) = \varphi(z_1, z_2)$.

La justificación es la misma a la del ejemplo anterior.

Sea $p : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/G_3$ la aplicación cociente que va de \mathbb{C}^2 al espacio cociente \mathbb{C}^2/G_3 , entonces por la observación anterior φ es una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}([(z_1, z_2)])$, para $[(z_1, z_2)] \in \mathbb{C}^2/G_3$. Por lo tanto, por el teorema B.3, φ induce una aplicación cociente $\psi : \mathbb{C}^2/G_3 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ tal que $\psi \circ p = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & & \\ \downarrow p & \searrow \varphi & \\ \mathbb{C}^2/G_3 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T} \times \mathbb{C} \end{array}$$

Observemos que ψ está bien definida y además es biyectiva, ya que:

- $\varphi(z_1, z_2) = \varphi(z'_1, z'_2)$ implica $[z_1, z_2] = [z'_1, z'_2]$,
- y por definición ψ es sobreyectiva.

De esta forma ψ es una aplicación cociente biyectiva, es decir, ψ es una aplicación biyectiva tal que $\psi(W)$ es abierto si, y sólo si, W es abierto. Por lo tanto, ψ es un homeomorfismo.

Paso (2): Probar que $\pi : D_3 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ es propia.

Sea $K_1 \times K_2$ un compacto en $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ con la topología producto, entonces por el teorema B.5, $K_1 \times K_2$ es compacto si, y sólo si, K_1 y K_2 son compactos. Luego como $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ es un espacio métrico, por el teorema B.7 cada K_i es cerrado y acotado para $i = 1, 2$.

Notemos que π es de la forma:

$$\pi(z_1, z_2) = (\pi_1(z_1, z_2), \pi_2(z_1, z_2)),$$

donde

$$\pi_1 : D_3 \rightarrow \mathbb{T} \quad \text{y} \quad \pi_2 : D_3 \rightarrow \mathbb{C}$$

son las funciones coordenadas de π . Luego, como π es continua entonces π_1 y π_2 son continuas (ver teo. B.1).

Un punto (z_1, z_2) está en $\pi^{-1}(K_1 \times K_2)$ si, y sólo si, $\pi(z_1, z_2) \in K_1 \times K_2$, esto es, si y sólo si $\pi_1(z_1, z_2) \in K_1$ y $\pi_2(z_1, z_2) \in K_2$. Por tanto

$$\pi^{-1}(K_1 \times K_2) = \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2).$$

Entonces para demostrar que $\pi^{-1}(K_1 \times K_2)$ es compacta, será suficiente demostrar que $\pi_i^{-1}(K_i)$ es compacta para $i = 1, 2$, ya que por el teorema B.6, intersección de dos conjuntos compactos es compacto.

En efecto, sea A el subconjunto compacto de \mathbb{C} dado por

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \leq 1\}.$$

Como

$$\pi_1(z_1, z_2) = (e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}),$$

entonces $\pi_1^{-1}(K_1)$ está contenida en A y además es cerrada, por lo tanto del teorema B.4, $\pi_1^{-1}(K_1)$ es compacta.

Análogamente

$$\begin{aligned} \pi_2^{-1}(K_2) &= \{(z_1, z_2) \in D_3 : \pi_2(z_1, z_2) \in K_2 \subset \mathbb{C}\} \\ &= \left\{ (z_1, z_2) \in D_3 : \frac{z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))}} \in K_2 \subset \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

y como K_2 es acotado, entonces existe una bola cerrada $\overline{B}_r(c)$ de radio r centrada en c , tal que $|z - c| \leq r$ para todo $z \in K_2$, equivalentemente

$$\left| \frac{z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))}} - c \right| \leq r \quad \text{para todo} \quad \frac{z_2}{e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))}} \in K_2,$$

esto último implica que

$$\left| z_2 - c e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))} \right| \leq r.$$

Sea P_2 la proyección de D_3 al segundo factor, es decir, $P_2(z_1, z_2) = z_2$ para todo $(z_1, z_2) \in D_3$.

Si $c' = c e^{2\pi i(\theta_1 \operatorname{Re}(z_1) + \theta_2 \operatorname{Im}(z_1))}$, entonces la proyección al segundo factor de $\pi_2^{-1}(K_2)$ está acotada por una bola cerrada $\overline{B}_r(c')$ de radio r y centrada en c' , así que $P_2(\pi_2^{-1}(K_2)) \subset \overline{B}_r(c')$.

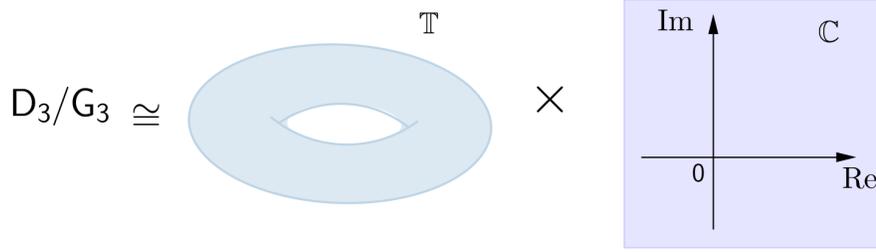
Observemos que $\overline{B}_r(c')$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} , entonces del teorema B.5, obtenemos que $A \times \overline{B}_r(c')$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C}^2 .

No es difícil verificar que $\pi_2^{-1}(K_2)$ está contenida en $A \times \overline{B}_r(c')$, y como además es cerrada, se sigue por el teorema B.4 que $\pi_2^{-1}(K_2)$ es compacta.

Por lo tanto, D_3 es un DFD para G_3 . □

El espacio cociente D_3/G_3 es homeomorfo $\mathbb{C}^2/G \cong \mathbb{T} \times \mathbb{C}$.

La demostración es análoga a la que utilizamos para demostrar que $\mathbb{C}^2/G \cong \mathbb{T} \times \mathbb{C}$.

Figura 3.4: Espacio cociente $D_3/G_3 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{C}$.

Sea $p|_{D_3}: D_3 \rightarrow D_3/G_3$, entonces π es una aplicación que es constante sobre cada conjunto $(p|_{D_3})^{-1}([(z_1, z_2)])$, para $[(z_1, z_2)] \in D_3/G_3$. Por lo tanto, por el teorema B.3, π induce una aplicación cociente $\rho: D_3/G_3 \rightarrow \mathbb{C}^2/G_3$ tal que $\rho \circ p|_{D_3} = \pi$.

$$\begin{array}{ccc} D_3 & & \\ p|_{D_3} \downarrow & \searrow \pi & \\ D_3/G_3 & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C}^2/G_3 \end{array}$$

Como ρ es biyectiva, pues por definición es sobreyectiva y además, $\pi([z_1, z_2]) = \pi([z'_1, z'_2])$ implica $[z_1, z_2] = [z'_1, z'_2]$. Entonces, ρ es un homeomorfismo. Por lo tanto,

$$D_3/G_3 \cong \mathbb{C}^2/G_3 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{C}.$$

(iii) El grupo abeliano G_5 generado por las transformaciones proyectivas

$$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El DFD de G_5 , es el conjunto

$$D_5 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 0 \leq \operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Re}(z_2) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z_1), \operatorname{Im}(z_2) \leq 1\}$$

(ver figura 3.5).

De nueva cuenta, la demostración es similar a los del ejemplo anterior. En efecto, tenemos que todo elemento en G_5 es de la forma:

$$g_6^l \cdot g_7^k \cdot g_8^m \cdot g_9^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l + ik \\ 0 & 1 & m + in \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } k, l, m, n \in \mathbb{Z}.$$

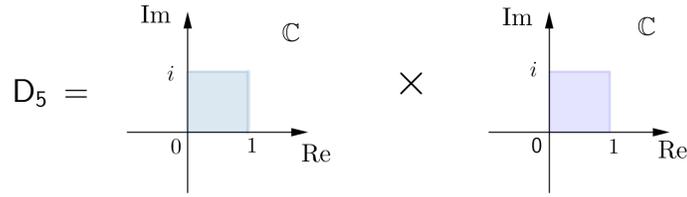


Figura 3.5: Dominio fundamental débil para G_5 .

Así,

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & l + ik \\ 0 & 1 & m + in \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : k, l, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Como $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \overleftrightarrow{e_1, e_2}$ es naturalmente indentificado con \mathbb{C}^2 por el mapeo

$$[z_1 : z_2 : 1] \mapsto (z_1, z_2),$$

las acciones quedan determinadas por

$$\begin{aligned} g_6(z_1, z_2) &= (z_1 + 1, z_2), \\ g_7(z_1, z_2) &= (z_1 + i, z_2), \\ g_8(z_1, z_2) &= (z_1, z_2 + 1), \\ g_9(z_1, z_2) &= (z_1, z_2 + i). \end{aligned}$$

Entonces para $(z_1, z_2) \in D_5$, se sigue que

$$g_6^l \cdot g_7^k \cdot g_8^m \cdot g_9^n(z_1, z_2) = (z_1 + l + ik, z_2 + m + in) \text{ con } k, l, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, si k, l, m y n corren sobre los número enteros \mathbb{Z} , obtenemos que el conjunto

$$\{(z_1 + l + ik, z_2 + m + in) : (z_1, z_2) \in D_5\}$$

cubre a todo \mathbb{C}^2 , es decir, los G_5 -trasladados de D_5 cubren a todo \mathbb{C}^2 . Por lo tanto, D_5 cumple la condición (i) de DFD.

Para probar que D_5 cumple la condición (ii) de DFD, tenemos la misma estrategia.

- (1) Demostrar que \mathbb{C}^2/G_5 y $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ son homeomorfos, donde \mathbb{T} es la superficie del toro.
- (2) Una vez obtenido el paso anterior, será suficiente demostrar que la proyección π , dada por $\pi : D_5 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ es propia.

Paso (1): Sea $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ dada por

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_2)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_2)}).$$

La función φ es una aplicación abierta, más aún, φ es una aplicación cociente.

Sea $\phi : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ definida por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (e^{2\pi i z_1}, e^{2\pi i z_2}, e^{2\pi i z_3}, e^{2\pi i z_4}).$$

Si J_ϕ es la matriz jacobiana de ϕ , entonces

$$J_\phi = \begin{pmatrix} 2\pi i e^{2\pi i z_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi i e^{2\pi i z_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi i e^{2\pi i z_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi i e^{2\pi i z_4} \end{pmatrix},$$

luego $\det(J_\phi) = 16\pi^4 e^{2\pi i(z_1+z_2+z_3+z_4)} \neq 0$ para todo $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$.

Por lo tanto ϕ es localmente una aplicación abierta, y dado que ϕ es continua obtenemos que ϕ es una aplicación abierta.

Sea $U = \{(\operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Im}(z_1), \operatorname{Re}(z_2), \operatorname{Im}(z_2)) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^4$, si restringimos ϕ al conjunto U obtenemos que $\phi|_U : U \rightarrow \mathbb{C}^4$ es una aplicación abierta. Así, como $\varphi = \phi|_U$, concluimos que φ es una aplicación abierta, esto último implica que φ es una aplicación cociente (ver def. B.6).

También notemos que

$$\begin{aligned} \varphi(z_1 + 1 + i, z_2) &= (e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1+1+i)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1+1+i)}, e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_2)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_2)}) \\ &= (e^{2\pi i(\operatorname{Re}(z_1)+1)}, e^{2\pi i(\operatorname{Im}(z_1)+1)}, e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_2)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_2)}) \\ &= (e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_2)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_2)}) \\ &= \varphi(z_1, z_2), \end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned}
 \varphi(z_1, z_2 + 1 + i) &= \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_2+1+i)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_2+1+i)} \right) \\
 &= \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, e^{2\pi i (\operatorname{Re}(z_2)+1)}, e^{2\pi i (\operatorname{Im}(z_2)+1)} \right) \\
 &= \left(e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_1)}, e^{2\pi i \operatorname{Re}(z_2)}, e^{2\pi i \operatorname{Im}(z_2)} \right) \\
 &= \varphi(z_1, z_2),
 \end{aligned}$$

Recordemos que todo elemento $g \in G_5$ actúa de la siguiente forma:

$$g(z_1, z_2) = g_6^l \cdot g_7^k \cdot g_8^m \cdot g_9^n(z_1, z_2) = (z_1 + l + ik, z_2 + m + in),$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces si $(z_1, z_2) \in D_5$, se sigue que $\varphi(g(z_1, z_2)) = \varphi(z_1, z_2)$ para toda $g \in G_5$.

El conjunto cociente \mathbb{C}^2/G_5 es el conjunto de clases de equivalencias en \mathbb{C}^2 formadas como sigue:

$$(z_1, z_2) \sim_{G_5} (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow \exists g \in G_5 \text{ tal que } g(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2).$$

Observación 3.5 $(z_1, z_2) \sim_{G_5} (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow \varphi(z'_1, z'_2) = \varphi(z_1, z_2)$.

La justificación es la misma que la del ejemplo (i).

Sea $p : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/G_5$ una aplicación cociente, entonces por la observación anterior φ es una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}([(z_1, z_2)])$, para $[(z_1, z_2)] \in \mathbb{C}^2/G_5$. Por lo tanto, por el teorema B.3, φ induce una aplicación cociente $\psi : \mathbb{C}^2/G_5 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ tal que $\psi \circ p = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^2 & & \\
 \downarrow p & \searrow \varphi & \\
 \mathbb{C}^2/G_5 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T} \times \mathbb{T}
 \end{array}$$

Observemos que ψ está bien definida y además es biyectiva, pues:

- $\varphi(z_1, z_2) = \varphi(z'_1, z'_2)$ implica $[z_1, z_2] = [z'_1, z'_2]$,
- y por definición ψ es sobreyectiva.

De esta forma ψ es una aplicación cociente biyectiva, es decir, ψ es una aplicación biyectiva tal que $\psi(W)$ es abierto si, y sólo si, W es abierto. Por lo tanto, ψ es un homeomorfismo.

Paso (2): Probar que $\pi : D_5 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ es propia.

Sea $\pi : D_5 \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, notemos que D_5 es un conjunto compacto de \mathbb{C}^2 . Además, $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ es un espacio métrico, así que por el teorema B.7, un conjunto compacto en $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ es cerrado y acotado .

De esta forma, sea K un conjunto compacto en $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, entonces $\pi^{-1}(K)$ es cerrada, por lo tanto por el teorema B.4, $\pi^{-1}(K)$ es un conjunto compacto. Así, la proyección π es propia.

Por lo tanto, D_5 es un DFD para G_5 . □

El espacio cociente D_5/G_5 es homeomorfo $\mathbb{C}^2/G \cong \mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

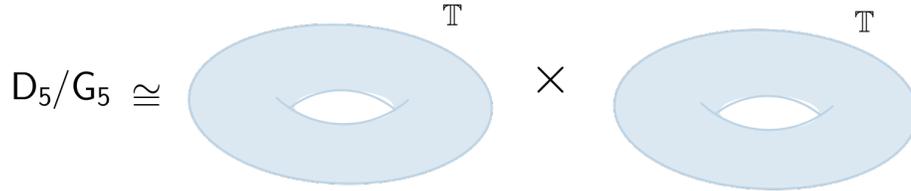


Figura 3.6: Espacio cociente $D_5/G_5 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

La demostración es análoga a la que utilizamos para demostrar que $\mathbb{C}^2/G \cong \mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

Sea $p|_{D_5} : D_5 \rightarrow D_5/G_5$, entonces π es una aplicación que es constante sobre cada conjunto $(p|_{D_5})^{-1}([(z_1, z_2)])$, para $[(z_1, z_2)] \in D_5/G_5$. Por lo tanto, por el teorema B.3, π induce una aplicación cociente $\rho : D_5/G_5 \rightarrow \mathbb{C}^2/G_5$ tal que $\rho \circ p|_{D_5} = \pi$.

$$\begin{array}{ccc}
 D_5 & & \\
 p|_{D_5} \downarrow & \searrow \pi & \\
 D_5/G_5 & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C}^2/G_5
 \end{array}$$

Como ρ es biyectiva, pues por definición es sobreyectiva y además, $\pi([(z_1, z_2)]) = \pi([(z'_1, z'_2)])$ implica $[z_1, z_2] = [z'_1, z'_2]$. Entonces, ρ es un homeomorfismo. Por lo tanto,

$$D_5/G_5 \cong \mathbb{C}^2/G_5 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{T}.$$

Usando la misma estrategia, no fué posible hallar el DFD para las extensiones finitas de estos ejemplos, es decir, para los grupos G_2 , G_4 y G_6 dados anteriormente en los ejemplos 3.1 y 3.2.

La estrategia no funcionó ya que no se pudo encontrar un espacio métrico que sea homeomorfa a \mathbb{C}^2/G_i para $i = 2, 4, 6$, anteriormente funcionaron los espacios $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ y $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, en esta ocasión dichos espacios no funcionaron; específicamente, el espacio Y que proponíamos en cada caso, implicaba que la función $\psi : \mathbb{C}^2/G_i \rightarrow Y$ no sea una aplicación abierta. Sin embargo, esto no significa que no se pueda encontrar explícitamente un DFD para los grupos G_2 , G_4 y G_6 , de hecho, los DFD que habíamos propuesto eran una ligera modificación de los DFD ya dados.

Por último cabe mencionar que la estrategia no se aplicó al grupo G_7 (ver ejemplo 3.2), debido a que este grupo no es abeliano, pero como habíamos mencionado, esto no significa nada sobre la existencia y forma de su DFD.

De esta manera damos por concluido este capítulo.

Conclusiones

En este trabajo estudiamos a los subgrupos kleinianos complejos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ actuando en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, tales que su conjunto límite de Kulkarni es igual a una línea. Introducimos el concepto y algunas propiedades del conjunto límite de Kulkarni [18], una de esas propiedades garantiza que si un grupo $G \leq \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ tiene un subgrupo de índice finito H , entonces $L_i(H) = L_i(G)$ para $i = 0, 1, 2$, i. e., $\Lambda(H) = \Lambda(G)$. También analizamos a los subgrupos de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ que actúan propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$ donde $\ell = \overleftrightarrow{e_1, e_2}$, de este análisis obtuvimos que dichos subgrupos contienen únicamente elementos elípticos, parabólicos ó loxo-parabólicos.

Basandonos del artículo *One line complex kleinian groups* de W. Barrera, A. Cano, y J.P. Navarrete (ver [7]), dimos una clasificación de los subgrupos G de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ con $\Lambda(G) = \ell$, esta clasificación consiste en ver los tipos de elementos que puede tener el grupo G . De igual forma, también mostramos que si $G \leq \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \ell$, entonces el conjunto límite Kulkarni de G es igual a ℓ o a la unión de ℓ y otra línea más, ésto dependerá de los tipos de elementos que contenga G . Cabe mencionar que en éstos dos últimos resultados, hubieron ligeras modificaciones con respecto a los dados en el artículo de *One line complex kleinian groups* en el cual nos basamos (ver [7]). Estas modificaciones son reflejadas en los teoremas 3.1 y 3.1 del capítulo 3 del presente trabajo, y ayudaron a obtener una clasificación más concreta de dichos grupos, i.e., una mejor descripción para cada ejemplo de grupo.

De los ejemplos que proporcionamos, únicamente para tres de éstos hallamos su dominio fundamental débil (DFD), para los demás ejemplos el método que utilizamos no funcionó. Sin embargo, esto no significa que no se puedan dar explícitamente dichos dominios. En el caso de los dominios fundamentales (DF), no se pudo encontrar alguno que funcione bien para los ejemplos proporcionados, aunque por otro lado, los DFD que encontramos nos dieron una idea de como se comporta la acción del grupo en el dominio de discontinuidad Ω , este comportamiento es muy parecido al caso de los grupos kleinianos clásicos, pues los DFD que encontramos son una extensión natural de los ya dados en el caso clásico.

Para finalizar, sólo resta comentar que este trabajo nos ayudo a comprender mejor la clasificación dinámica de los grupos kleinianos complejos elementales con $\Lambda(G) = \ell$. Por

lo cual, todavía faltan muchos grupos por analizar, así que unos proyectos a futuro sería tratar de dar una clasificación tipo Maskit de los grupos kleinianos complejos elementales, lo cual también incluiría tratar de encontrar los respectivos dominios fundamentales y dominios fundamentales débiles.

Apéndice A

Geometría de grupos

En este apéndice repasamos algunos conceptos básicos de geometría euclidiana, entre estos, a los grupos discretos euclidianos. Posteriormente, enunciamos el teorema A.7 el cual nos fué de gran ayuda, ya que proporciona condiciones necesarias y suficientes para que todo subgrupo G del grupo de isometrías euclidianas, sea un subgrupo discreto. Todo el contenido es tomado del libro *Foundations of Hyperbolic Manifolds* de J.G. Ratcliffe (ver [27]).

A.1. El n -espacio euclidiano

El modelo analítico estandar para la geometría euclidiana de dimensión n es el espacio vectorial real \mathbb{R}^n . Sean x y y vectores en \mathbb{R}^n . El *producto interno euclidiano* de x y y es definido por el número real

$$x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Definición A.1 Una *métrica* en un conjunto X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para toda $x, y \in X$,

- (1) $d(x, y) \geq 0$ (no negativa);
- (2) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$ (no degenerada);
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simétrica); y
- (4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad del triángulo).

Definición A.2 Un *espacio métrico* es un conjunto X con una métrica d en X .

Definición A.3 Sea X un espacio métrico con una métrica d . Un subconjunto A de X se dice que está acotado si existe algún número M tal que

$$d(a_1, a_2) \leq M$$

para todo par a_1, a_2 de puntos de A .

Denotaremos por E^n al espacio métrico euclidiano de dimensión n , el cual consiste de \mathbb{R}^n con la métrica euclidiana d_E , donde

$$d_E(x, y) = |x - y| = ((x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Un elemento de un espacio métrico es llamado un **punto**. Sea X un espacio métrico con la métrica d . La *bola abierta* de radio $r > 0$, centrada en el punto a de X , es definida por el conjunto

$$B_r(a) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

La *bola cerrada* de radio $r > 0$, centrada en el punto a de X , es definida por el conjunto

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}.$$

Un subconjunto U de X es un abierto en X si, y sólo si, para cada punto x de U , existe un $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$. En particular, si S es un subconjunto de X y $r > 0$, entonces la *r-vecindad* de S en X , se define por

$$N_r(S) = \cup\{B_r(x) : x \in S\},$$

es un abierto en X .

La colección de todos los subconjuntos abiertos de un espacio métrico X es una topología en X , llamada la *topología métrica* de X . La topología de E^n es llamada la *topología euclidiana* de \mathbb{R}^n .

Una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos *preserva distancia* si, y sólo si

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) \text{ para toda } x, y \in X.$$

Definición A.4 Una *isometría* de un espacio métrico X a un espacio métrico Y es una función biyectiva $f : X \rightarrow Y$, tal que f preserva distancia.

Ejemplo A.1 Sea a un punto de E^n . La función $T_a : E^n \rightarrow E^n$, definida por la fórmula

$$T_a(x) = a + x,$$

es llamada la *traslación* de E^n por a . La función T_a es una isometría, ya que T_a es una biyección con inversa T_{-a} y

$$d_E(T_a(x), T_a(y)) = |T_a(x) - T_a(y)| = |(a + x) - (a + y)| = |x - y| = d_E(x, y).$$

El conjunto de isometrías de un espacio métrico X sobre sí mismo, junto con la composición de funciones, forman un grupo $I(X)$, llamado el *grupo de isometrías* de X . De esta forma, $I(E^n)$ el *grupo de isometrías euclidianas*.

Definición A.5 Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *transformación ortogonal* si, y sólo si,

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Una matriz real $A_{n \times n}$ se dice que es *ortogonal* si, y sólo si, la transformación asociada $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $A(x) = Ax$, es ortogonal. El conjunto de todas las matrices ortogonales de $n \times n$ junto con la multiplicación matricial forman un grupo $O(n)$, llamado el *grupo de matrices ortogonales* de $n \times n$.

Definición A.6 Un *m-plano* de E^n es un coseto $a + V$ de un subespacio vectorial V de \mathbb{R}^n de dimensión m .

El complemento ortogonal de un subespacio vectorial V de \mathbb{R}^n de dimensión m es definido por el siguiente conjunto

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot y = 0 \text{ para todo } y \in V\}.$$

A.2. Isometrías del espacio hiperbólico

A.2.1. Grupos topológicos

Sean z y w vectores en \mathbb{C}^n . El *producto interno hermitiano* de z y w es definido como el número complejo

$$z * w = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n,$$

donde una barra denota la conjugación compleja. La *norma hermitiana* de un vector $z \in \mathbb{C}^n$ es definida por el número real

$$|z| = (z * z)^{\frac{1}{2}}.$$

La norma hermitiana determina una métrica en \mathbb{C}^n , dicha métrica está dada por

$$d_C = |z - w|.$$

El espacio métrico que consiste de \mathbb{C}^n con la métrica d_C es llamado el *n-espacio complejo*.

Definición A.7 Un *grupo topológico* es un grupo G que es también un espacio topológico tal que la multiplicación $(g, h) \mapsto gh$ y la inversión $g \mapsto g^{-1}$ en G son funciones continuas.

Algunos ejemplos de grupos topológicos son:

- (1) El n -espacio real \mathbb{R}^n con la suma de vectores.
- (2) El n -espacio complejo \mathbb{C}^n con la suma de vectores.
- (3) Los números positivos reales \mathbb{R}_+ con la multiplicación.
- (4) El círculo unitario \mathbb{S}^1 en el plano complejo con la multiplicación compleja.
- (5) Los números complejos diferentes de cero \mathbb{C}^* con la multiplicación compleja.

Definición A.8 Dos grupos topológicos G y H son *grupos topológicos isomorfos* si, y sólo si, existe un isomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ que también es un homeomorfismo.

Sea $GL(n, \mathbb{C})$ el conjunto de todas las matrices invertibles complejas de $n \times n$. Entonces $GL(n, \mathbb{C})$ es un grupo con la multiplicación de matrices y es llamado el *grupo lineal general* de matrices complejas de $n \times n$.

La norma de una matriz compleja $A = (a_{ij})$ de $n \times n$ se define como el número real

$$|A| = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Esta norma determina una métrica en $GL(n, \mathbb{C})$ en la forma usual,

$$d(A, B) = |A - B|.$$

Note que ésta es justamente la métrica euclidiana en $GL(n, \mathbb{C})$ considerada como un subconjunto de \mathbb{C}^{n^2} . Por esta razón, llamamos a d la *métrica euclidiana* en $GL(n, \mathbb{C})$.

Teorema A.1 El grupo lineal general $GL(n, \mathbb{C})$, con la topología métrica reducida por la norma hermitiana, es un grupo topológico.

Todo subgrupo H de un grupo topológico es un grupo topológico con la topología subespacio. Por lo tanto, cada uno de los siguientes subgrupos de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ es un grupo topológico con la topología métrica euclidiana:

- (1) El grupo lineal especial $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ de todas las matrices complejas de $n \times n$ con determinante igual a uno.
- (2) El grupo lineal general $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices invertibles de $n \times n$.
- (3) El grupo lineal especial $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices reales de $n \times n$ con determinante igual a uno.
- (4) El grupo ortogonal $\text{O}(n)$.

Una matriz compleja A de $n \times n$, es *unitaria* si, y sólo si,

$$(Az) * (Aw) = z * w$$

para todo z, w en \mathbb{C}^n . El conjunto de todas las matrices unitarias en $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ forman un subgrupo $\text{U}(n)$, llamado el *grupo unitario* de matrices complejas de $n \times n$. Una matriz unitaria es real si, y sólo si, es ortogonal. De esta forma $\text{O}(n)$ es un subgrupo de $\text{U}(n)$.

A.2.2. Grupos discretos

Definición A.9 Un *grupo discreto* es un grupo topológico tal que todos sus puntos son abiertos.

Lema A.1 Si G es un subgrupo topológico, entonces G es discreto si, y sólo si, el elemento neutro de G denotado por $\{1_G\}$, es un abierto en G

Demostración: Si G es discreto, entonces $\{1_G\}$ es abierto. Recíprocamente, supongamos que $\{1_G\}$ es abierto. Sea g en G . Entonces la multiplicación izquierda por g es un homeomorfismo de G . Por lo tanto $g\{1_G\} = \{g\}$ es un abierto en G .

□

Todo grupo G se puede convertir en un grupo discreto G dando la topología discreta. Por lo tanto, la topología de un grupo discreto no es muy interesante. Lo que es interesante es el estudio de los subgrupos discretos de un grupo continuo como \mathbb{R}^n ó $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Estos son algunos ejemplos de subgrupos discretos de grupos continuos conocidos:

- (1) Los enteros \mathbb{Z} como un subgrupo discreto de \mathbb{R} .
- (2) Los enteros Gaussianos $\mathbb{Z}[i] = \{m + in : m, n \in \mathbb{Z}\}$ son un subgrupo discreto de \mathbb{C} .

- (3) El conjunto $\{k^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo discreto de \mathbb{R}_+ para cada $k > 0$.
- (4) El grupo de las raíces n -ésimas de la unidad $\{e^{(2\pi im/n)} : m = 0, 1, \dots, n-1\}$ es un subgrupo discreto de \mathbb{S}^1 para cada entero n .
- (5) El conjunto $\{k^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo discreto de \mathbb{C}^* para cada k en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{S}^1$.

Lema A.2 Un espacio métrico X es discreto si, y sólo si, cada sucesión convergente $\{x_n\}$ en X es eventualmente constante.

Lema A.3 Si G es un grupo topológico con una topología métrica, entonces cada subgrupo discreto de G es cerrado en G .

Teorema A.2 Un subgrupo G de $U(n)$ es discreto si, y sólo si, G es finito.

Demostración: Si G es finito, se sigue inmediatamente que G es discreto. Recíprocamente, supongamos que G es discreto. Entonces por el lema A.3, G es cerrado en $U(n)$. Por lo tanto G es compacto, ya que $U(n)$ es compacto. Como G es discreto, G debe ser finito.

□

Teorema A.3 Un subgrupo G de \mathbb{R}^n es discreto si, y sólo si, G es generado por un conjunto de vectores linealmente independientes.

Definición A.10 Una *retícula* de \mathbb{R}^n es un subgrupo generado por n vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^n .

Corolario A.1 Cada retícula de \mathbb{R}^n es un subgrupo discreto de \mathbb{R}^n .

Definición A.11 Un grupo G actúa *discontinuamente* en un espacio topológico X si, y sólo si, G actúa en X y para cada subconjunto compacto K de X , el conjunto $K \cap gK \neq \emptyset$ únicamente para un número finito de g en G .

Teorema A.4 Sea X un espacio métrico compacto finito. Entonces un grupo G de isometrías de X es discreto si, y sólo si, G es discontinuo.

A.2.3. Grupos euclidianos discretos

Definición A.12 Una isometría f de E^n es elíptica si, y sólo si, f fija un punto de E^n ; en otro caso f es parabólico.

Cada elemento de f de $I(E^n)$ es de la forma $f(x) = a + Ax$ con a en E^n y A en $O(n)$. Por comodidad escribiremos simplemente $f = a + A$.

Sea A una matriz real de $n \times n$. El *operador normal* de A es definido por

$$\|A\| = \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Si A y B son matrices reales de $n \times n$ y si x es un punto de E^n , entonces

$$(1) |Ax| \leq \|A\|\|x\|,$$

$$(2) \|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

$$(3) \|A \pm B\| \leq \|A\| + \|B\|;$$

si B es ortogonal, entonces

$$(4) \|BA\| = \|A\| = \|AB\|,$$

$$(5) \|BAB^{-1} - I\| = \|A - I\|.$$

La norma operador determina una métrica d en $O(n)$ definida por

$$d(A, B) = \|A - B\|.$$

Lema A.4 Sea G un subgrupo discreto de $I(E^n)$ y sean $g_1 = a + A$ y $g_2 = b + B$ ambos en G . Si $\|A - I\| < 1/2$ y $\|B - I\| < \sqrt{2}$. Entonces A y B conmutan.

Lema A.5 Sea G un subgrupo discreto de $I(E^n)$ y sean $g_1 = a + A$ y $g_2 = b + B$ en G , con $\|A - I\| < 1$ y $\|B - I\| < 1$. Si A y B conmutan, entonces g_1 y g_2 conmutan.

Lema A.6 Sea G un subgrupo de $I(E^n)$ y para cada $r > 0$, sea

$$G_r = \langle a + A \in G : \|A - I\| < r \rangle,$$

y sea $k_n(r)$ el número máximo de elementos de $O(n)$ con distancias mutuas de al menos r con respecto a la métrica $d(A, B) = \|A - B\|$. Entonces G_r es un subgrupo normal de G y $[G : G_r] \leq k_n(r)$ para cada $r > 0$.

Teorema A.5 Sea G un subgrupo discreto de $I(E^n)$. Entonces G tiene un subgrupo normal abeliano N de índice finito que contiene todas las traslaciones en G y el índice de N en G está acotado por un número que depende únicamente de n .

Demostración: Sea $N = G_{\frac{1}{2}}$. Entonces por el lema A.6 tenemos que N es un subgrupo normal de G con $[G : N] \leq k_n(1/2)$; además, por los lemas A.4 y A.5 N es abeliano. Claramente N contiene cada traslación en G . □

Definición A.13 Sea G un grupo que actúa en un conjunto X .

- (1) Un elemento g de G actúa *trivialmente* en X si, y sólo si, $gx = x$ para toda x en X .
- (2) El grupo G actúa *trivialmente* en X si, y sólo si, cada elemento de G actúa trivialmente en X .
- (3) El grupo G actúa *efectivamente* en X si, y sólo si, el elemento neutro 1_G es el único elemento de G que actúa trivialmente en X .

Teorema A.6 Sea G un subgrupo abeliano discreto de $I(E^n)$. Entonces existen subgrupos H y K de G y un m -plano P de E^n tal que

- (1) el grupo G tiene la descomposición en suma directa $G = K \oplus H$;
- (2) el grupo K es finito y actúa trivialmente en P ; y
- (3) el grupo H es abeliano libre de rango m y actúa efectivamente en P como un grupo discreto de traslaciones.

Demostración: La prueba es por inducción sobre la dimensión n . No es difícil verificar que el teorema se satisface cuando $n = 0$. Supongamos que $n > 0$ y que el teorema es verdadero para todas las dimensiones menores que n . Elijamos $g_1 = a + A$ en G de tal manera que la dimensión del espacio vectorial V de todos los vectores en E^n fijados por A , sea la más pequeña posible. Si $V = E^n$, entonces G es un grupo de traslaciones y el teorema es válido para G por el teorema A.3 con $H = G$ y P el espacio vectorial generado por la órbita $G_0 = \{0\}$.

Ahora supongamos que $\dim V < n$. Conjugando G por una traslación, podemos suponer que A fija a . Sea $g_2 = b + B$ en G . Entonces

$$\begin{aligned}
 [g_1, g_2] &= g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \\
 &= g_1 g_2 g_1^{-1} (-B^{-1}b + B^{-1}) \\
 &= g_1 g_2 (-A^{-1}a - A^{-1}B^{-1}b + A^{-1}B^{-1}) \\
 &= g_1 (b - BA^{-1}a - BA^{-1}B^{-1}b + BA^{-1}B^{-1}) \\
 &= a + Ab - ABA^{-1}a - ABA^{-1}B^{-1}b + ABA^{-1}B^{-1}) \\
 &= (A - I)b + (I - B)a + I.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(A - I)b + (I - B)a = 0$. Como A y B conmutan, $B(V) = V$ y así $(B - I)(V) \subset V$. De la ecuación

$$(B - I)a = (A - I)b,$$

deducimos que $(B - I)a$ está en $V \cap W = \{0\}$ (W es el espacio vectorial de todos los vectores en E^n fijados por B). Por lo tanto B fija a y A fija b . Así b está en V . En consecuencia g_2 , y por lo tanto G , dejan invariante a V .

Conjugando el grupo G por una rotación apropiada, podemos suponer que $V = E^k$ con $k < n$. Sea \bar{G} el subgrupo de $I(E^k)$ obtenido mediante la restricción de las isometrías en G , y sea $\rho : G \rightarrow \bar{G}$ la restricción homomorfismo. El kernel de ρ es un subgrupo discreto de $O(n)$ y por lo tanto por el teorema A.2 es finito. Como G actúa discontinuamente en E^k , el grupo \bar{G} también lo hace y por lo tanto es discreto.

Por la hipótesis de inducción, existen subgrupos \bar{H} y \bar{K} de \bar{G} , y un m -plano P de E^k tal que:

- (1) $\bar{G} = \bar{K} \oplus \bar{H}$,
- (2) \bar{K} es finito y actúa trivialmente en P , y
- (3) \bar{H} es abeliano libre de rango m y actúa efectivamente en P como un grupo discreto de traslaciones.

Sea $K = \rho^{-1}(\bar{K})$. Entonces K es un subgrupo finito de G , y K actúa trivialmente en P . Además, existe una sucesión exacta

$$1_G \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow \bar{H} \rightarrow 1_G.$$

La sucesión se divide, ya que \bar{H} es abeliano libre. Por lo tanto, existe un subgrupo H de G tal que $G = K \oplus H$ y ρ manda bajo isomorfismo a H en \bar{H} . De esta forma H es abeliano libre de rango m y H actúa efectivamente en P como un subgrupo discreto de traslaciones. Esto completa la inducción. □

Definición A.14 Un *subgrupo retícula* G de $I(E^n)$ es un grupo G generado por n traslaciones linealmente independientes.

Corolario A.2 Un subgrupo G de $I(E^n)$ es un subgrupo retícula si, y sólo si, G es discreto y abeliano libre de rango n .

Lema A.7 Sea H un subgrupo de índice finito en un grupo topológico G con una topología métrica. Si H es discreto, entonces G es discreto.

Demostración: Supongamos que H es discreto. Entonces por el lema A.3 H es cerrado. Como H es de índice finito en G , existen elementos g_1, \dots, g_m en G , con $g_1 = 1_G$, tal que

$$G = g_1H \cup \dots \cup g_mH.$$

Por lo tanto, tenemos

$$H = G - g_2H \cup \dots \cup g_mH.$$

Como cada coseto g_iH es cerrado en G , tenemos que H es abierto en G . Como $\{1_G\}$ es abierto en H , entonces $\{1_G\}$ es abierto en G . Así G es discreto. □

El siguiente teorema se sigue inmediatamente de los teoremas A.5 y A.6, y del lema A.7.

Teorema A.7 Sea G un subgrupo de $I(E^n)$. Entonces G es discreto si, y sólo si, G tiene un subgrupo abeliano libre H de rango m y de índice finito tal que H actúa efectivamente sobre un m -plano P de E^n como un grupo discreto de traslaciones.

Apéndice B

Teoremas importantes

En este apéndice enunciamos algunas definiciones y teoremas que utilizamos durante el desarrollo de la tesis. La mayor parte del contenido de la sección de topología fué tomada del libro de Munkres [22], en la sección de grupos kleinianos las citas fueron tomadas de [25] y [9]. Por su parte, el contenido de la sección de grupos de Lie fué tomada de [13] y de [12]. Cabe mencionar que no incluiremos las demostraciones de la gran mayoría de los teoremas, éstos pueden consultarse en sus respectivas referencias.

B.1. Topología

En esta sección daremos algunos resultados de topología y variable compleja, que se utilizaron para hallar los dominios fundamentales débiles de algunos ejemplos dados en la sección 3.4.

Definición B.1 Una *topología* sobre un conjunto X es una colección \mathcal{J} de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- (1) \emptyset y X están en \mathcal{J} .
- (2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de \mathcal{J} está en \mathcal{J} .
- (3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de \mathcal{J} está en \mathcal{J} .

Un conjunto X para el que se ha definido una topología se llama *espacio topológico*.

Hablando con propiedad, un espacio topológico es un par ordenado (X, \mathcal{J}) , formado por un conjunto X y una topología \mathcal{J} sobre X , pero a menudo omitiremos hacer mención específica de \mathcal{J} si no existe confusión.

Si X es un espacio topológico con una topología \mathcal{J} , diremos que un subconjunto U de X es un *conjunto abierto* de X si U pertenece a la colección \mathcal{J} , de esta forma \emptyset y X son conjuntos abiertos.

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es *cerrado* si el conjunto $X - A$ es abierto.

Definición B.2 Si X es un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X (llamados *elementos básicos*) tales que:

- (1) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x .
- (2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cup B_2$.

Definición B.3 Sean X e Y espacios topológicos. La *topología producto* sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección \mathcal{B} de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y .

Teorema B.1 (Aplicaciones en productos). Sea $f : A \rightarrow X \times Y$ dada por la ecuación

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Entonces f es continua si, y sólo si, las funciones

$$f_1 : A \rightarrow X \quad \text{y} \quad f_2 : A \rightarrow Y$$

son continuas. Las aplicaciones f_1 y f_2 se llaman *funciones coordenadas* de f .

Definición B.4 Sea X un espacio topológico con topología \mathcal{J} . Si Y es un subconjunto de X , la colección

$$\mathcal{J}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{J}\}$$

es una topología sobre Y , denominada *topología de subespacio* ó *topología relativa*. Con esta topología, Y se denomina *subespacio* de X ; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y .

Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice que es *continua* si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

Definición B.5 Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \rightarrow Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

son ambas continuas, entonces f se dice que es un *homeomorfismo*.

Otro modo de definir un homeomorfismo es decir que es una correspondencia biyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(U)$ es abierto si, y sólo si, U es abierto.

Definición B.6 Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una *aplicación cociente* siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

Dos clases especiales de aplicaciones cociente son las aplicaciones abiertas y las aplicaciones cerradas. Recordemos que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice que es una *aplicación abierta* (*aplicación cerrada*) si para cada conjunto abierto (cerrado) U de X , el conjunto $f(U)$ es abierto (cerrado). Se sigue inmediatamente de la definición que si $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua sobreyectiva que es abierta ó cerrada, entonces p es una aplicación cociente.

Definición B.7 Si X es un espacio, A un conjunto y $p : X \rightarrow A$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología \mathcal{J} sobre A relativa a la cual p es una aplicación cociente; se denomina topología cociente inducida por p .

Definición B.8 Sea X un espacio topológico y sea X^* una partición de X en subconjuntos disjuntos cuya unión es X . Sea $p : X \rightarrow X^*$ la aplicación sobreyectiva que lleva cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene. En la topología cociente inducida por p , el espacio X^* se denomina *espacio cociente* de X .

Dado X^* , hay una relación de equivalencia sobre X en la que los elementos de X^* son las clases de equivalencia. Se puede pensar en X^* como obtenido al “identificar” cada par de puntos equivalentes. Por este motivo, el espacio cociente X^* se denomina a menudo *espacio de identificación*, o *espacio de descomposición*, del espacio X .

Teorema B.2 (ver [16]) Sea G un grupo de homeomorfismos de X en sí mismo. Si X actúa en G , entonces, la proyección canónica $\pi : X \rightarrow X/G$ es una aplicación abierta.

Demostración: Sea U un conjunto abierto en X y consideremos $\pi^{-1}(\pi(U))$.

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X : \pi(x) \in \pi(U)\} \\ &= \{x \in X : G(x) = G(y) \text{ para algún } y \in U\} \\ &= \{x \in X : x = g(y) \text{ para algún } y \in U, \text{ y algún } g \in G\} \\ &= \{x \in X : x \in g(U) \text{ para algún } g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} g(U) \end{aligned}$$

La acción de cada $g \in G$ es un homeomorfismo, por lo que si U es abierto también lo es $\pi^{-1}(\pi(U))$, y, por lo tanto, $\pi(U)$ es abierto en X/G .

□

Teorema B.3 Sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación cociente. Sea Z un espacio y sea $g : X \rightarrow Z$ una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$, para $y \in Y$. Entonces g induce una aplicación $f : Y \rightarrow Z$ tal que $f \circ p = g$. La aplicación inducida f es continua si, y sólo si, g es continua; f es una aplicación cociente si, y sólo si, g es una aplicación cociente.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow p & \searrow g & \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Demostración: Para cada $y \in Y$, el conjunto $g(p^{-1}(\{y\}))$ es un conjunto unipuntual en Z (puesto que g es constante sobre $p^{-1}(\{y\})$). Si denotamos por $f(y)$ a este punto, entonces hemos definido una aplicación $f : Y \rightarrow Z$ tal que para cada $x \in X$, $f(p(x)) = g(x)$. Si f es continua, entonces $g = f \circ p$ es continua. Recíprocamente, supongamos que g es continua. Dado un conjunto abierto V de Z , $g^{-1}(V)$ es abierto en X . Pero $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$; como p es una aplicación cociente, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en Y . De aquí, f es continua.

Si f es una aplicación cociente, entonces g es la composición de dos aplicaciones cociente y es así una aplicación cociente. Recíprocamente, supongamos que g es una aplicación cociente. Puesto que g es sobreyectiva, también lo es f . Sea V un subconjunto de Z ; probaremos que V es abierto en Z si $f^{-1}(V)$ es abierto en Y . Ahora el conjunto $p^{-1}(f^{-1}(V))$ es abierto en X por que p es continua. Puesto que este conjunto es igual a $g^{-1}(V)$, este último es abierto en X . Entonces, como g es una aplicación cociente, V es abierto en Z . □

Definición B.9 Una colección \mathcal{A} de subconjuntos del espacio X se dice que *cubre* X , ó que es una *cubierta* de X , si la unión de los elementos de \mathcal{A} coincide con X . Se dice que \mathcal{A} es una *cubierta abierta* de X si es una cubierta de X formado por conjuntos abiertos de X .

Definición B.10 Un espacio se dice que es *compacto* si de cada cubierta abierta \mathcal{A} de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X .

Teorema B.4 Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto [16].

Teorema B.5 Sean X e Y espacios topológicos. $X \times Y$ es compacto si, y sólo si, X e Y lo son [16].

Definición B.11 Un espacio X se dice que es *localmente compacto*, si para cada punto $x \in X$ existe un subespacio compacto C de X que contiene una vecindad de x .

Definición B.12 Un espacio topológico X se denomina *espacio de Hausdorff* si para cada x_1, x_2 de puntos distintos de X , existen abiertos U_1 y U_2 de x_1 y x_2 , respectivamente, que son disjuntos.

Denotaremos por $\mathcal{C}(X, Y)$ al conjunto de todas las aplicaciones continuas de un espacio X en un espacio métrico Y . El concepto de espacio métrico fué introducido al inicio del apéndice anterior.

Definición B.13 Sean X e Y espacio topológicos. Si C es un subespacio compacto de X y U es un subconjunto abierto de Y , definimos

$$S(C, U) = \{f : f \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ y } f(C) \subset U\}.$$

Los conjuntos $S(C, U)$ conforman una subbase para una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ que se conoce como *topología compacto-abierta*.

Enseguida mencionaremos algunos resultados con respecto a los espacios métricos.

Teorema B.6 Sea X un espacio métrico, si A y B son subconjuntos compactos de X , entonces $A \cap B$ es compacto.

Teorema B.7 Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico X . Entonces K es cerrado y acotado [2].

Proposición B.1 Un subconjunto de \mathbb{R} ó de \mathbb{C} es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado [1].

Definición B.14 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{C}^n y f una función compleja valuada definida en Ω . Decimos que f es holomorfa en Ω , si para cada punto $p \in \Omega$ existe una correspondiente vecindad U y una serie de potencias

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_{\alpha} (z - p)^{\alpha} = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (z_1 - p_1)^{\alpha_1} \dots (z_n - p_n)^{\alpha_n}$$

el cual converge a $f(z)$ para $z \in U$ [23].

Lema B.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ una función holomorfa. Supongamos que $\det(J_f)_p \neq 0$ para alguna $p \in \Omega$. Entonces existen vecindades U de p y V de $f(p)$, tal que $f(U) \subset V$ y $f|_U$ es un isomorfismo analítico sobre V [23].

B.2. Grupos kleinianos complejos

B.2.1. Clasificación de los elementos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$

En esta subsección enunciaremos el teorema de la clasificación de los elementos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ según su traza. Para esto, veamos las siguientes definiciones:

Denotaremos por $C_3 = \{\omega, \omega^2, 1\} \subset \mathbb{C}$ al conjunto de las raíces cúbicas de la unidad, y por $3C_3$ al conjunto $\{3\omega, 3\omega^2, 3\}$.

Definición B.15 Una *3-esfera en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$* es cualquier trasladado por un elemento de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ del conjunto difeomorfo a una 3-esfera dado por

$$T = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 = 0\}.$$

Observemos que la familia de 3-esferas

$$T(r) = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = r|z_3|^2\}, r > 0,$$

constituye una foliación de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\overleftarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \cup e_3)$, donde

$$\overleftarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : z_3 = 0\} \text{ y } e_3 = [0 : 0 : 1].$$

Si $h \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, entonces la familia de 3-esferas dada por $h(T(r)), r > 0$ también constituye una foliación de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (h(\overleftarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cup h(e_3))$.

Definición B.16 Diremos que una transformación $g \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ es **elíptica** si preserva cada una de las hojas de alguna foliación por 3-esferas de las antes mencionadas, en otras palabras, $g \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ es elíptica si, y sólo si, existe $h \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ tal que $h^{-1}gh(T(r)) = T(r)$ para cada $r > 0$.

Definición B.17 La transformación $g \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ se llama **parabólica** si existe una familia de 3-esferas invariantes bajo g , T_r , $r \in \mathbb{R}$, y un punto fijo de g , el cual denotamos mediante $[\mathbf{z}]_f$, que satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Para cada par de elementos diferentes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$,

$$T_{r_1} \cap T_{r_2} = \{[\mathbf{z}]_f\}.$$

- ii) $\Lambda(g)$ es una línea.

- iii) Además,

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 - \bigcup_{r \in \mathbb{R}} (T_r \setminus \{[\mathbf{z}]_f\}) = \Lambda(g).$$

Definición B.18 La transformación parabólica $g \in \text{PSL}(3, \mathbb{C})$ se llama:

- i) **Unipotente**, si se tiene un levantamiento $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$ tal que cada valor propio de g es igual a 1.
- ii) **Elipso-parabólico**, si no es unipotente. Decimos que g es **racional** (respectivamente **irracional**) si g tiene un levantamiento tal que el cociente de los dos valores propios diferentes es igual a $e^{2\pi ix}$ con x racional (respectivamente irracional).

Observemos que el elemento $g \in \text{PSL}(3, \mathbb{C})$ es parabólico si, y sólo si, g tiene un levantamiento $g \in \text{SL}$ que no es diagonalizable y todos sus valores propios tienen módulo igual a 1.

Definición B.19 Un elemento $g \in \text{PSL}(3, \mathbb{C})$ se llama **loxodrómico**, si existe una 3-esfera W en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, tal que $g(W \cup \mathbb{X}_i) \subset \mathbb{X}_i$, para algún $i = 1, 2$; donde \mathbb{X}_1 y \mathbb{X}_2 son las componentes conexas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus W$.

Definición B.20 Un elemento $g \in \text{PSL}(3, \mathbb{C})$ se llama **loxo-parabólico**, si tiene un levantamiento que es conjugado de una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$.

Definición B.21 Una **homotecia compleja** es un elemento de $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$ que tiene un levantamiento que es conjugado de una matriz de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. Un **tornillo racional** (resp. **irracional**) es una función de $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$ que no es una homotecia compleja y tiene un levantamiento que es conjugado de una matriz de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_1| = |\lambda_2| \neq |\lambda_3|$, $|\lambda_1|/\lambda_2 = e^{2\pi ix}$ con $x \in \mathbb{Q}$ (resp. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Observemos que una homotecia compleja y un tornillo son transformaciones loxodrómicas.

Definición B.22 Una transformación g se llama **fuertemente loxodrómica** si existen dos 3-esferas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, $T^{(1)}$ y $T^{(2)}$, tales que

- (1) $g(T^{(1)} \cup B_1) \subset B_1$,
- (2) $g^{-1}(T^{(2)} \cup B_2) \subset B_2$, y
- (3) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$,

donde B_i , $i = 1, 2$ es la componente conexa de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus T^{(i)}$ que es difeomorfa a una bola abierta en \mathbb{C}^2 .

Teorema B.8 (ver [25])

- (i) Toda transformación de $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$ resulta ser de uno y sólo uno de los tipos definidos anteriormente: elíptica, parabólica o loxodrómica.
- (ii) Una transformación elíptica es de uno y sólo uno de los siguientes dos tipos:
 - regular (si tiene un levantamiento tal que todos sus valores propios son diferentes)
 - o bien conjugada de una reflexión compleja (tiene un levantamiento tal que dos valores propios son iguales).
- (iii) Una transformación parabólica es de uno y sólo uno de los siguientes dos tipos:
 - unipotente (tiene un levantamiento tal que todos sus valores propios son iguales a 1), o
 - elipto-parabólica (no es unipotente).
- (iv) Una transformación loxodrómica es de uno y sólo uno de los siguientes cuatro tipos: loxo-parabólica, homotecia compleja, tornillo o fuertemente loxodrómica.

Antes de enunciar el teorema de clasificación, veamos las siguientes terminologías: Una transformación **loxodrómica regular** será una transformación loxodrómica que tiene un levantamiento tal que todos sus valores propios son diferentes. Las transformaciones fuertemente loxodrómicas y los tornillos son, precisamente, las transformaciones loxodrómicas regulares.

Diremos que una transformación loxodrómica es **hiperbólica compleja**, si preserva una 3-esfera. Así que una transformación hiperbólica compleja es necesariamente fuertemente loxodrómica, pero no todas las transformaciones fuertemente loxodrómicas son hiperbólicas complejas.

Denotaremos por $\tau(g)$ a la traza de $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$, donde g es un levantamiento de $g \in \text{PSL}(3, \mathbb{C})$.

A continuación presentamos el **Teorema de la Clasificación**.

Teorema B.9 (ver [25]) Sea $F(x, y) = x^2y^2 - 4(x^3 + y^3) + 18xy - 27 \in \mathbb{C}[x, y]$, y $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$. Supongamos que g es la transformación de $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$ inducida por g .

- (i) g es una transformación elíptica regular si, y sólo si, $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) < 0$.
- (ii) g es hiperbólica compleja (es loxodrómica y preserva una 3-esfera) si, y sólo si, $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) > 0$.
- (iii) g es elipto-parabólico si, y sólo si, $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$, $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) = 0$, $\tau(g) \notin 3C_3$, y g no es elíptica.
- (iv) g es conjugada de una reflexión compleja si, y sólo si, g es elíptica, $\tau(g) \notin 3C_3$, $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) = 0$.
- (v) g es una transformación parabólica unipotente si, y sólo si, $\tau(g) \in 3C_3$, $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y g no es la identidad.
- (vi) g es loxodrómico regular pero no hiperbólico complejo si, y sólo si, $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) \neq 0$.
- (vii) g es una homotecia compleja si, y sólo si, g es diagonalizable, $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$.
- (viii) g es loxo-parabólico si, y sólo si, $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$, $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$ y $\tau(g)$ no es diagonalizable.

Otro resultado importante, es el siguiente (ver pag. 44 de [9]).

Proposición B.2 Sea $G \subset \text{PSL}(3, \mathbb{C})$ un subgrupo discreto. Entonces G es finito si, y sólo si, cada elemento en G tiene orden finito.

B.3. Grupos de Lie

En esta sección introduciremos el concepto de grupo de Lie y presentaremos a manera de ejemplo, el grupo de Heisenberg real de dimensión 3, denotado por H_3 .

B.3.1. Variedades complejas

La definición de variedad compleja, puede extenderse de la definición de variedad diferenciable, tan solo pidiendo que el atlas en la variedad tenga cambios de coordenadas holomorfos, es decir,

Definición B.23 Una *variedad compleja* de dimensión n , es un espacio Hausdorff donde existe una familia $\{(U_i, \phi_i)\}$ tal que:

- U_i es un abierto de M y $\bigcup U_i = M$.
- ϕ_i es un homomorfismo de U_i en un abierto de \mathbb{C}^n .
- Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el mapeo $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ es un biholomorfismo.

Para comprender mejor el concepto de variedad compleja, veamos el concepto de estructura compleja.

Definición B.24 Una *estructura compleja* para un \mathbb{R} -espacio vectorial V , es un endomorfismo lineal de V , digamos J , tal que $J^2 = -Id_V$.

Cabe mencionar, que si un \mathbb{R} -espacio vectorial V , tiene una estructura compleja J , bajo la multiplicación escalar

$$(a + ib)v = av + bJv, \quad v \in V,$$

podemos darle la estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial.

B.3.2. Grupos de Lie nilpotentes

Definición B.25 Un *grupo de Lie complejo* es un grupo G que contiene una estructura de variedad compleja en la cual la operación

$$(g, h) \in G \times G \mapsto gh^{-1} \in G$$

es holomorfa.

En la definición anterior, $G \times G$ esta dotada de la estructura compleja $J \times J$.

Ejemplo B.1 $GL(n, \mathbb{C})$ es un grupo de Lie complejo, cuya estructura compleja se obtiene de considerarlo como un abierto de \mathbb{C}^{n^2} .

Sea N un grupo cualquiera, entonces la serie central superior de N

$$Z_*(N) : Z_0(N) = 1_N \subset Z_1(N) \subset \cdots \subset Z_i(N) \subset \cdots$$

se define inductivamente por la condición de que

$$Z_{i+1}(N)/Z_i(N) = Z(N/Z_i(N))$$

donde $Z(G)$ denota el centro de un grupo G y 1_N el elemento neutro de N . El grupo N se dice que es nilpotente si la serie central superior llega a N después de un número finito de pasos, es decir, existe un número entero positivo tal que $Z_c(N) = N$. Si c es el menor entero positivo tal que $Z_c(N) = N$, decimos que N es c pasos nilpotente o N es nilpotente de clase c .

Definición B.26 Sea G un grupo localmente compacto y H un subgrupo. Diremos que H es un *subgrupo uniforme* si H es discreto y H/G es compacto (de modo que existe un conjunto compacto $K \subset G$ tal que $HK = G$).

Definición B.27 Sea G un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo. Una *retícula uniforme* de G es un subgrupo discreto uniforme, i. e., un subgrupo discreto con cociente compacto, N de G .

Observemos que no todos los grupos de Lie nilpotentes simplemente conexos admiten retículas.

Teorema B.10 Toda retícula N de un grupo de Lie nilpotente G simplemente conexo es un grupo nilpotente libre de torsión finitamente generado. Por el contrario, para cualquier grupo nilpotente N finitamente generado y libre de torsión existe (salvo isomorfismo) exactamente un grupo de Lie nilpotente G simplemente conexo que contiene a N como una retícula uniforme. Nos referimos a esta G como la completación de Malcev de N .

Ejemplo B.2 Consideremos el grupo de Heisenberg H_3 de dimensión 3

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Entonces para toda $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos una retícula uniforme Γ_k de H_3 , dicha retícula es el subgrupo generado por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por cálculos directos no es difícil verificar que

$$\Gamma_k = \langle A, B, C : [B, A] = C^k, [C, A] = [C, B] = 1 \rangle,$$

donde $[\cdot, \cdot]$ denota el conmutador de dos elementos en Γ_k y 1 la matriz identidad.

Teorema B.11 Sea H un subgrupo discreto de un grupo de Lie nilpotente G . Entonces existe un único subgrupo de Lie $N \subset G$ tal que H es un subgrupo uniforme de N . En realidad, N es el subgrupo de Lie mas pequeño que contiene a H [12].

Apéndice C

Superficies complejas compactas

En este apéndice presentamos un resumen de los conceptos y resultados del artículo *Fundamental groups of compact complete locally affine complex surface* de J. Fillmore y J. Scheuneman (ver [14]). Este artículo habla básicamente sobre el grupo fundamental de una variedad compleja completa compacta, y localmente afín de dimensiones dos compleja. La inclusión de éste se debe su gran ayuda en esta tesis.

C.1. Introducción

Una variedad localmente afín, es una variedad con una conexión afín que tiene curvatura y torsión igual a cero. Una variedad real completa localmente afín es de la forma \mathbb{R}^n/G (ver [5]) y una variedad compleja completa localmente afín es de la forma \mathbb{C}^n/G (ver [21]); donde G denota un grupo de transformaciones afines reales ó complejas que actúa libre, propia y discontinuamente, cuya conexión es inducida de forma natural en \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n . Esta representación permite un estudio teórico de grupos de espacios completos localmente afines, el aspecto más difícil consiste en determinar cuales grupos abstractos se pueden incrustar en el grupo de transformaciones afines de \mathbb{R}^n ó \mathbb{C}^n para obtener un grupo como él descrito anteriormente. Tales grupos son, por supuesto, los grupos fundamentales de espacios completos localmente afines.

C.2. Preliminares Algebraicos

En esta sección, derivaremos resultados importantes acerca de subgrupos G del grupo $\text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ de transformaciones afines complejas de \mathbb{C}^2 , usando únicamente la suposición de que G actúa libremente en \mathbb{C}^2 .

Una transformación $A \in \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ puede ser identificado con una matriz compleja no

singular

$$\begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La acción de A , a la izquierda de \mathbb{C}^2 , envía (x, y) a (x', y') , donde

$$x' = ax + by + r$$

$$y' = cx + dy + s.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$, denotamos por $h(A)$ a la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, la “parte de holonomía” de A .

Lema C.1 Si $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ actúa de manera libre en \mathbb{C}^2 , entonces cada elemento de $h(G)$ tiene a 1 como un valor propio.

Demostración: El punto (x, y) es un punto fijo de $\begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$, exactamente si

$$\begin{aligned} (a-1)x + by &= -r \\ cx + (d-1)y &= -s. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones tienen una solución a menos que 1 sea un eigenvalor de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. \square

Denotaremos por G_1 al grupo de todas las matrices complejas de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a \neq 0$; y por G_2 al grupo de todas las matrices complejas de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $d \neq 0$.

Proposición C.1 (ver [17]) Si $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ actúa de manera libre en \mathbb{C}^2 , entonces G es conjugado en $\text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ a un subgrupo de G_1 ó a un subgrupo de G_2 .

Corolario C.1 Si G actúa de manera libre en \mathbb{C}^2 , entonces G es soluble.

Lema C.2 Si $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ actúa de manera libre en \mathbb{C}^2 y $h(G)$ es abeliano, entonces G es conjugado en $\text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ a un subgrupo del grupo de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } d \neq 0,$$

ó a un subgrupo del grupo de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema C.3 Si

$$\begin{pmatrix} a & b & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no tiene puntos fijos en \mathbb{C}^2 , entonces $b = 0$.

Demostración: Si $b \neq 0$, $(0, -r/b)$ es un punto fijo.

□

Lema C.4 Si $G \subset G_1$ actúa de manera libre en \mathbb{C}^2 , entonces $h(G)$ es abeliano.

Demostración: Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a' & b' & r' \\ 0 & 1 & s' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elementos de G . Entonces

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} a & f & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lema C.3, $f = 0$.

□

Corolario C.2 Si $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ actúa de manera libre en \mathbb{C}^2 , entonces G es conjugado en $\text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ a un subgrupo de G_2 .

Demostración: Por la proposición C.1, G es conjugado a un subgrupo de G_1 ó de G_2 . Si G es conjugado a un subgrupo de G_1 , entonces por el lema C.4, $h(G)$ es abeliano. Así, por el lema C.2, G es conjugado a un subgrupo de G_2 . □

Lema C.5 Si $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ es abeliano y actúa de manera libre en \mathbb{C}^2 , entonces G es conjugado en $\text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ a un subgrupo del grupo de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o a un subgrupo del grupo de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } d \neq 0.$$

C.3. Preliminares topológicos

Las hipótesis de que G actúa propia y discontinuamente en \mathbb{C}^2 y que \mathbb{C}^2/G es compacto se ponen en juego en esta sección.

Notemos el siguiente hecho importante (ver [11], pag. 357): La dimensión de un espacio euclidiano real en el cual un grupo G actúa de manera libre, propia y discontinuamente, y con espacio de órbita compacta está determinada por G mismo, es decir, está dado como la dimensión proyectiva del anillo de grupo entero de G .

Como una primera aplicación de esta observación, demostremos el siguiente lema de Auslander [4].

Lema C.6 Supongamos que $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ actúa de manera libre, propia y discontinuamente, y que \mathbb{C}^2/G es compacto. Entonces el conjunto de las partes traslacionales (r, s) de elementos

$$\begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de G contiene una base para \mathbb{C}^2 como un espacio vectorial real.

Demostración: Sea V el subespacio real de \mathbb{C}^2 generado por las partes traslacionales de elementos de G . Entonces la acción de G en \mathbb{C}^2 envía a V a sí mismo. Además, G actúa de manera libre, propia y discontinuamente en V , y V/G es compacto. Por la observación anterior, V y \mathbb{C}^2 tienen la misma dimensión, así $V = \mathbb{C}^2$. □

Corolario C.3 Si $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ es abeliano, actúa de manera libre, propia y discontinuamente, y \mathbb{C}^2/G es compacto, entonces G es conjugado en $\text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ a un subgrupo del grupo de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema C.7 Supongamos que $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ actúa propia y discontinuamente en \mathbb{C}^2 y que además contiene elementos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & f & u \\ 0 & h & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tales que $d \neq 1$ y $AB \neq BA$. Entonces d es una raíz de la unidad.

Demostración: Por cálculos directos podemos verificar que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d^n-1}{d-1}b & \frac{d^n-1}{d-1} \frac{bs}{d-1} + n \left(r - \frac{bs}{d-1} \right) \\ 0 & d^n & \frac{d^n-1}{d-1}s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para toda n en \mathbb{N} , y que la matriz

$$C_n = A^{-n}BA^nB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & f_n & u_n \\ 0 & 1 & v_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene entradas dadas por

$$\begin{aligned} f_n &= (d^n - 1) \left(\frac{f}{h} - \frac{b}{d-1} + \frac{d}{(d-1)h} \right), \\ u_n &= (d^n - 1) \left(-\frac{fv}{h} - \frac{bv}{(d-1)h} + \frac{bv}{d-1} + \frac{bs}{(d-1)^2} + \frac{sf}{d-1} - \frac{bsh}{(d-1)^2} \right) \\ &\quad + (d^{-n} - 1) \left(-\frac{bsh}{(d-1)^2} + \frac{bv}{d-1} + \frac{bs}{(d-1)^2} \right), \\ v_n &= (d^{-n} - 1) \left(v + \frac{s}{d-1} - \frac{sh}{d-1} \right). \end{aligned}$$

Afirmamos que si d no es una raíz de la unidad, entonces las matrices C_n son distintas. En efecto, supongamos que $C_m = C_n$ con $m \neq n$. Esto implica que

$$\begin{aligned} f/h - b/(d-1) + b/((d-1)h) &= 0, \\ v + s/(d-1) - sh/(d-1) &= 0; \end{aligned}$$

equivalentemente tenemos

$$(d-1)f + b(1-h) = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$(d-1)v + s(1-h) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Multiplicando la ecuación C.1 por s y la ecuación C.2 por b ; y restando, obtenemos

$$(d-1)(sf - bv) = 0.$$

Las ecuaciones

$$\begin{aligned} (d-1)f &= b(h-1), \\ (d-1)v &= s(h-1), \\ sf &= bv \end{aligned}$$

implican $AB = BA$; lo cual es una contradicción.

Supongamos que d no es raíz de la unidad y consideremos los puntos (x_n, y_n) de \mathbb{C}^2 obtenidos al aplicar las distintas transformaciones C_n de G al punto $(0, v - sh/(d-1))$. Entonces

$$\begin{aligned} x_n &= f_n \left(v - \frac{sh}{d-1} \right) + u_n = (d^{-n} - 1) \left(-\frac{bsh}{(d-1)^2} + \frac{bv}{d-1} + \frac{bs}{(d-1)^2} \right), \\ y_n &= v - \frac{sh}{d-1} + v_n = d^{-n} \left(v + \frac{s}{d-1} - \frac{sh}{d-1} \right) - \frac{s}{d-1}. \end{aligned}$$

Si $|d| = 1$, podemos encontrar una sucesión $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que tienda a infinito tal que $\lim_{n_i \rightarrow \infty} d^{n_i} = 1$. Entonces la sucesión de puntos (x_{n_i}, y_{n_i}) tiene un límite en \mathbb{C}^2 , lo cual contradice la suposición de que G actúa propia y discontinuamente. Si $|d| \neq 1$, podemos suponer que $|d| > 1$. Nuevamente esta sucesión de puntos tiene un punto límite y por lo tanto obtenemos la misma contradicción. □

Proposición C.2 Si $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ actúa de manera libre, propia y discontinuamente en \mathbb{C}^2 , y \mathbb{C}^2/G es compacto, entonces G contiene un subgrupo normal unipotente G_0 de índice finito con G/G_0 cíclico.

Demostración: Por el corolario C.2, podemos suponer que $G \subset G_2$. Supongamos que G contiene un elemento central

$$\begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $d \neq 1$. Conjugando G por

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-b}{d-1} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{s}{d-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2$$

obtenemos un subgrupo de G_2 que contiene el elemento central

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r' \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como este elemento es central, todos los elementos de este nuevo subgrupo tienen la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero, de acuerdo al lema C.6, esto no puede suceder.

Ahora en general, G es el grupo fundamental de la variedad compacta \mathbb{C}^2/G , por lo que es finitamente generado. Sea

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & b_i & r_i \\ 0 & d_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

un conjunto de generadores de G . Si A_i es central, $d_i = 1$ por el párrafo anterior. Si A_i no es central, por el lema C.7 d_i es una raíz de la unidad. Por lo tanto, la imagen del homomorfismo

$$\begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow d$$

de G sobre el grupo del círculo unitario en \mathbb{C} es un grupo finito. Este grupo finito, siendo un subgrupo del grupo multiplicativo de un campo es cíclico. El kernel de este homomorfismo es el subgrupo G_0 deseado.

□

C.4. El teorema principal

En esta sección, afinaremos el enunciado de la proposición C.2.

Sea D_k ($k \geq 1$) el grupo nilpotente libre de torsión con generadores: A, B, C y D ; cuyas relaciones son: $ABA^{-1}B^{-1} = \mathbb{C}^k$, C y D centrales. Entonces el resultado que afina la proposición C.2, está dado por el siguiente teorema:

Teorema C.1 Si $G \subset \text{Aff}(\mathbb{C}^2)$ actúa de manera libre, propia y discontinuamente en \mathbb{C}^2 , y \mathbb{C}^2/G es compacto. Entonces G contiene un subgrupo normal unipotente G_0 de índice finito tal que G_0 es isomorfo a \mathbb{Z}^4 o a D_r (para alguna $k \geq 1$) y además G/G_0 es cíclico de orden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 ó 12.

Demostración: Sea G_0 el subgrupo de G obtenido en la proposición C.2. Por resultados de Malcev ([19]) sobre nilvariedades, G_0 puede ser considerado como un subgrupo discreto de un único grupo de Lie nilpotente simplemente conexo N tal que N/G_0 es compacto. Entonces G_0 actúa de manera libre, propia y discontinuamente en el espacio N y el espacio de órbitas es compacto. N es topológicamente euclidiano, así por el lema C.6, la dimensión real de N es cuatro. Ahora, existen únicamente dos grupos de Lie simplemente conexos de dimensión cuatro, estos son

$$\mathbb{R}^4 \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \times \mathbb{R}.$$

Para estos dos grupos, los subgrupos discretos con cociente compacto son conocidos por ser isomorfos a \mathbb{Z}^4 en el primer caso y a D_k en el segundo.

Sea $H \subset \mathbb{C}$ el grupo aditivo de los números complejos b tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_0.$$

Sea $S \in G$ un elemento cuya imagen en G/G_0 genera este grupo cíclico. Entonces

$$S = \begin{pmatrix} 1 & f & u \\ 0 & \lambda & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\lambda^n = 1$, donde n es el índice de G_0 en G .

Si $b \in H$, entonces

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & b & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda b & r' \\ 0 & 0 & \lambda^{-1}s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

implica que $\lambda b \in H$. Si H es el subgrupo trivial $\{0\}$ de \mathbb{C} , entonces el “grupo de holonomía” $h(G)$ es cíclico finito de orden n y este caso es el ya estudiado por Auslander en [3], el cual nos dice que $n = 1, 2, 3, 4$ ó 6 . Supongamos ahora que H no es trivial. Entonces H es un grupo abeliano libre de rango r , con $1 \leq r \leq 4$, ya que G_0 puede ser generado por cuatro elementos. Sean b_1, \dots, b_r una base de H . Expresando λb_i en términos de esta base y tomando un determinante, obtenemos un polinomio de grado r con coeficientes enteros el cual se satisface por λ . Por lo tanto el campo generado por λ sobre los racionales es de grado a lo más r . Este campo es el campo generado por una raíz primitiva n -ésima de la unidad, por lo que tiene grado $\varphi(n)$, donde φ es la función de Euler. Así $\varphi(n) \leq r$. Las únicas soluciones de $\varphi(n) \leq 4$ son las ya enumeradas en el enunciado del teorema.

□

Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*; 2da edición. McGraw-Hill, Inc. 1966.
- [2] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*; 2da edición. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1976.
- [3] L. Auslander. *Four dimensional compact locally Hermitian manifolds*; Trans. Amer. Math. Soc., **84** (1957), 379-391.
- [4] L. Auslander. *On the group of affinities of locally affine spaces*; Proc. Amer. Math. Soc., **9** (1958), 471-473.
- [5] L. Auslander and L. Markus. *Holonomy of flat affinely connected manifolds*; Ann. of Math., **62** (1955), 139-151.
- [6] W. Barrera, A. Cano, J.P. Navarrete. *The limit set of discrete subgroups of $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$* ; Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2011), 150, 129.
- [7] W. Barrera, A. Cano, J.P. Navarrete. *One Line Complex Kleinian Groups*; Pacific Journal of Mathematics, Vol.272 (2014), No. 2, 275-303.
- [8] A. F. Beardon. *The geometry of discrete groups*; Springer Verlag, 1983.
- [9] A. Cano, J.P. Navarrete, J. Seade. *Complex Kleinian Groups*; Progress in Mathematics, 303, Birkhäuser 2013.
- [10] A. Cano, J. Seade. *On Discrete groups of Automorphisms of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$* ; Geometriae Dedicata. Published on line 08 January 2013. DOI 10.1007/s10711-012-9816-2
- [11] H. Cartan, S. Eilenberg. *Homological Algebra*; Princeton University Press. Princeton, 1956.
- [12] L. J. Corwin, F. P Greenleaf. *Representations of Nilpotent Lie groups and their Applications, Part I: Basic Theory and Examples*; Cambridge University Press, 1989.
- [13] K. Dekimpe. *Almost-Bieberbach Groups: Affine and Polynomial Structures*; Katholieke Universiteit Leuven. Springer, 1996.

- [14] J. P. Fillmore, J. Scheuneman. *Fundamental groups of compact complete locally affine complex surfaces*; Pacific Journal of Mathematics, Vol. 44, No. 2, 1973, pp. 487-496.
- [15] Alex Güemez. *Tesis: Grupos Kleinianos Complejos Actuando en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$* ; Fac. de Matemáticas.UADY, Mérida, Yucatán (2012).
- [16] C. Kosniowski. *Topología Algebraica*; Cambridge University Press, 1986.
- [17] N. Kuiper. *Sur les surface localement affines*; Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg, (1953), 79-87.
- [18] R. S. Kulkarni. *Groups With Domains of Discontinuity*; Math. Ann. **237** (1978) 253-272.
- [19] A. Malcev. *On a class of homogeneous spaces*; Amer. Math. Soc. Transl., (1) **9** (1962), 276-307 (originally **39** (1951)).
- [20] B. Maskit. *Kleinian Groups*; A series in comprehensible studies in mathematics.287.
- [21] Y. Matsushima. *Affine structures on complex manifolds*; Osaka J. Math., **5** (1968), 215-222.
- [22] J. R. Munkres. *Topología*; 2da edición. Pearson Educación, 2002.
- [23] R. Narasimhan. *several complex variables*; The University of Chicago Press, 1971.
- [24] J.P. Navarrete. *Tesis: Grupos Kleinianos Complejos En $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$* ; Fac. de Ciencias.UNAM, D.F., México (2006).
- [25] J.P. Navarrete. *The Trace Function and Complex Kleinian Groups in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$* ; International Journal of Mathematics, **19** (2008) 865-890.
- [26] A. Ramírez, J. Seade. *Introducción a la geometría avanzada*; Coordinación de Servicios Editoriales, F.C, UNAM, México (2005).
- [27] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*; Springer (1994).
- [28] J. Scheuneman. *Fundamental groups of compact complete locally affine complex surfaces II*; Pacific Journal of Mathematics, Vol. 52, No. 2, 1974, pp. 553-566.
- [29] J. Seade and A. Verjovsky. *Actions of Discrete Subgroups on Complex Projective Spaces*; Contemporary Mathematics, AMS **269** (2001) 155-178.